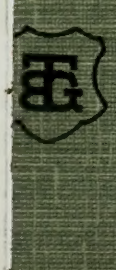


HOCHHEIM

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

III

A: AUFGABEN



4 —

P. P.

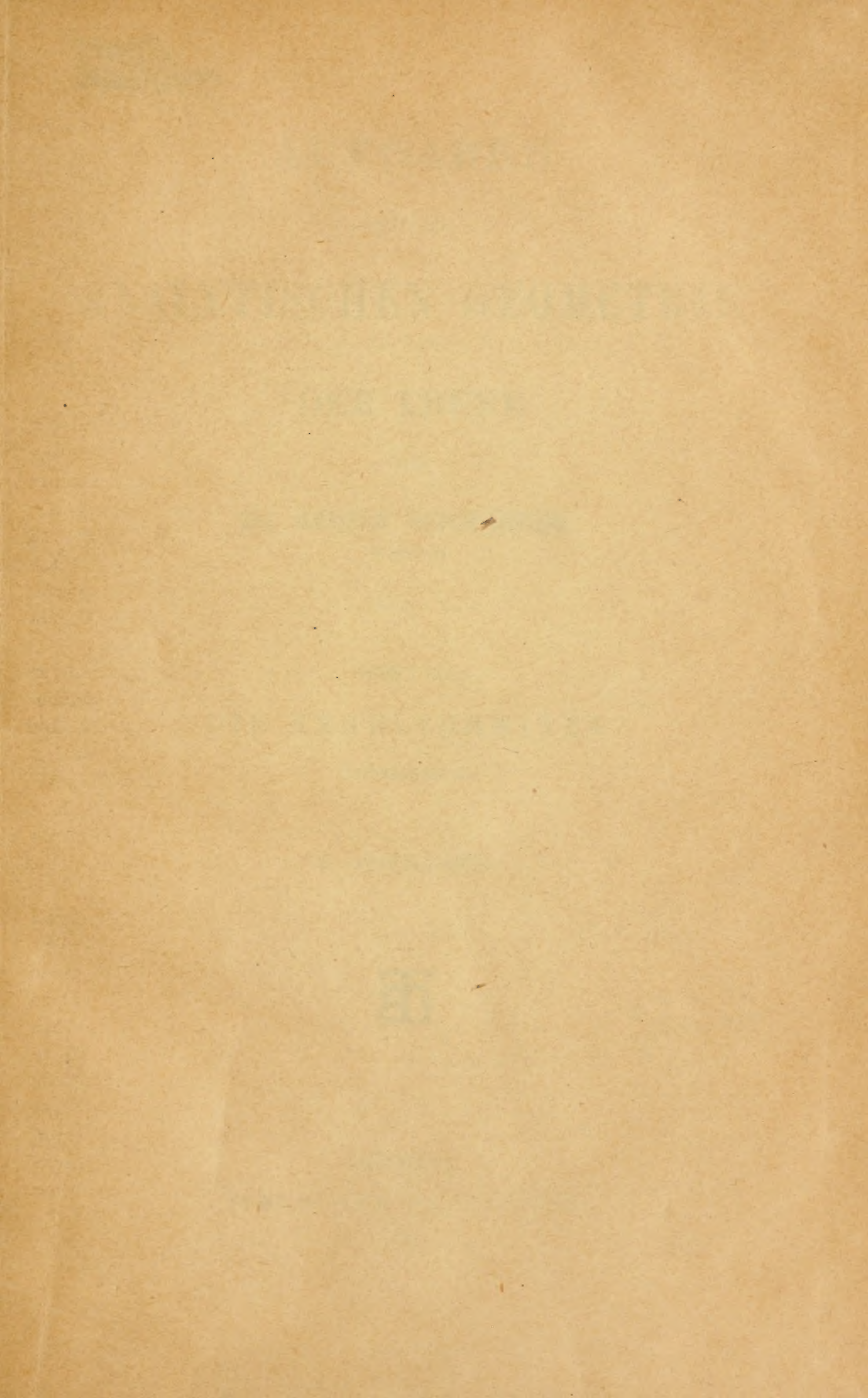
Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen,** der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

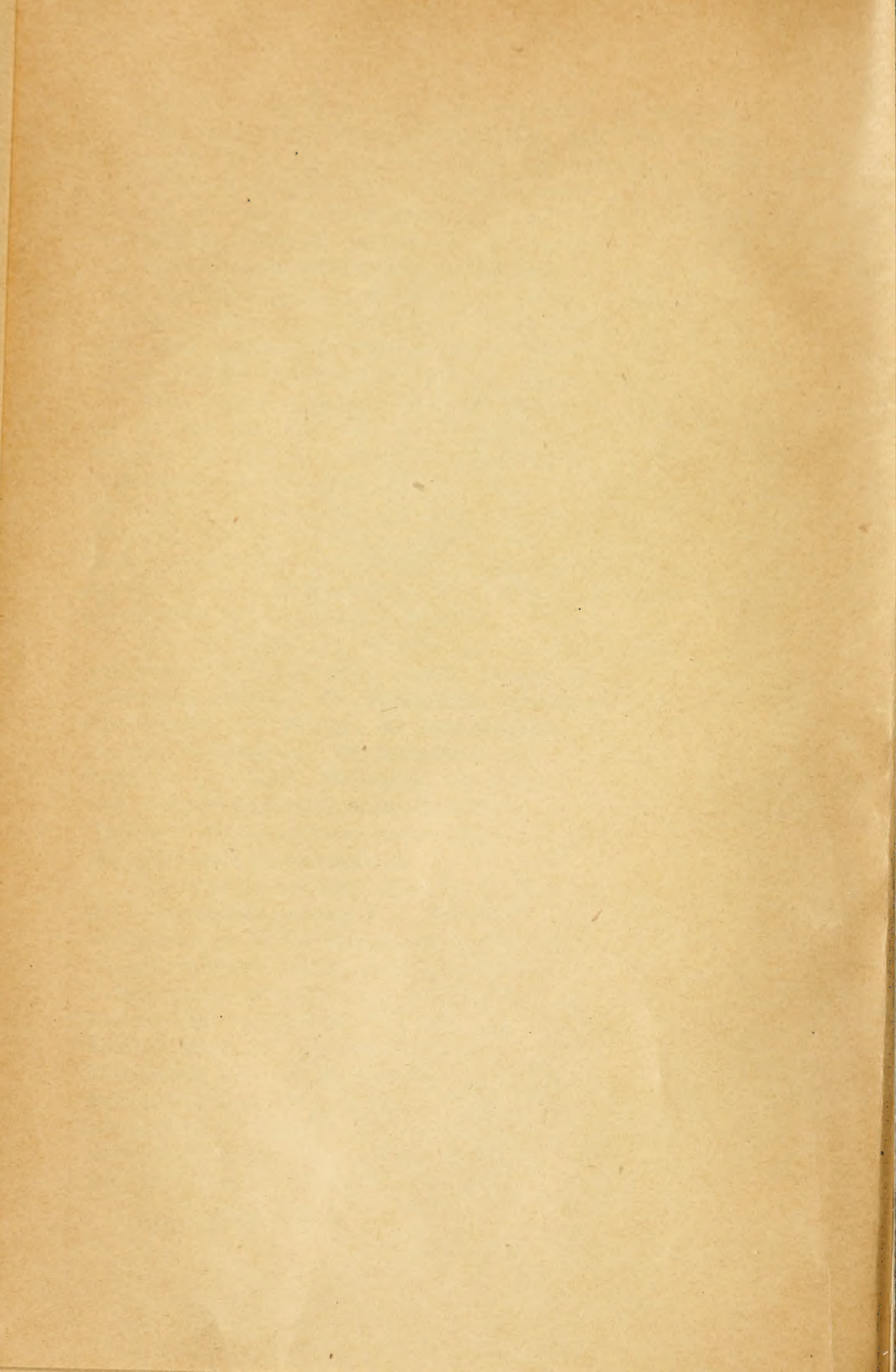
Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig, München und Wien herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird. Eine **französische Ausgabe** der Encyklopädie hat zu erscheinen begonnen.

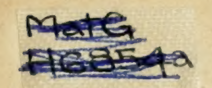
Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica,** das **Archiv der Mathematik und Physik,** die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,** die **Zeitschrift für Mathematik und Physik,** Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht,** ferner **Natur und Schule** (Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen), die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 30000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten,** 100. Ausgabe [XLVIII u. 272 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

LEIPZIG, Poststraße 3. **B. G. Teubner.**







AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

DR. ADOLF HOCHHEIM,
PROFESSOR.

HEFT III.a

DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG II.

A. AUFGABEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Projektivische Geometrie.

Projektivische Strahlenbüschel in einer Ebene.

Projektivische Strahlenbüschel in schiefer Lage.

1. Gegeben sind zwei Strahlenbüschel

$$L_1x + M_1y + N_1 + f(L_2x + M_2y + N_2) = 0,$$
$$L'_1x + M'_1y + N'_1 + k(L'_2x + M'_2y + N'_2) = 0.$$

Es sollen die Koordinaten eines Punktes bestimmt werden, in dem ein Strahl des ersten Büschels einen Strahl des zweiten Büschels schneidet.

Beispiel. $5x - 2y + 1 + f(x + 3y - 4) = 0,$
$9x + y + 3 + k(x - 2y - 7) = 0.$

2. Gegeben sind zwei Strahlenbüschel

$$L_1x + M_1y + N_1 + f(L_2x + M_2y + N_2) = 0,$$
$$L'_1x + M'_1y + N'_1 + k(L'_2x + M'_2y + N'_2) = 0.$$

Welche Form muß die algebraische Relation zwischen den beiden Parametern f und k besitzen, wenn jedem Strahl des einen Büschels ein einziger Strahl des andern Büschels entsprechen soll?

3. Wie gestaltet sich die Gleichung zwischen den Parametern f und k der beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$A_1 + fA_2 = 0, \quad A'_1 + kA'_2 = 0,$$

wenn man annimmt, daß A_1 dem Strahle A'_1 und A_2 dem Strahle A'_2 entspricht?

4. Jedes der beiden Strahlenbüschel

$$A_1 + f_1A_2 = 0, \quad B_1 + f_2B_2 = 0$$

ist dem dritten Büschel $C_1 + kC_2 = 0$ projektivisch. Es ist zu zeigen, daß dann die beiden ersten Büschel einander projektivisch sind.

5. Zwischen den Parametern der beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$5x - 2y + 3 + f(x + y - 1) = 0,$$
$$3x + y - 2 + k(4x - 7y + 6) = 0$$

besteht die Relation $fk + 3f - 5k + 6 = 0$.

Zu dem ersten Büschel gehört der Strahl $7x + 1 = 0$. Welcher Strahl des zweiten Büschels entspricht demselben?

6. Die Parameter der beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$2y - x - 6 + f(3y - 2x - 7) = 0,$$
$$y + 2x - 17 + k(2y - 3x + 29) = 0$$

stehen durch die Bedingungsgleichung $3f - 2k = 0$ zu einander in Beziehung. Welche Strahlen entsprechen der Verbindungslinie der Mittelpunkte, je nachdem diese Linie dem ersten oder dem zweiten Büschel zugerechnet wird?

7. Gegeben sind die beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$L_1 + fL_2 = 0, \quad L'_1 + kL'_2 = 0$$

und die zugehörige Parametergleichung $fk + af + bk + c = 0$.

Wie viele Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser beiden Büschel werden auf der Geraden $L_3 = 0$ liegen?

8. Die Parametergleichung der beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$x - y - 1 + f(2x + y + 3) = 0,$$
$$5x + 2y - 3 + k(x + y + 2) = 0$$

ist $fk + 2f - k + 3 = 0$.

Es sollen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen der Büschel bestimmt werden, welche auf der X-Achse liegen.

9. Von den beiden projektivischen Strahlenbüscheln

$$3x - y + f(x + y - 1) = 0,$$
$$x + 2y + k(5x - 3y - 2) = 0$$

sollen diejenigen zugeordneten Strahlen bestimmt werden, welche einander parallel laufen. Die Parametergleichung ist $3f - 2k = 0$.

10. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel

$$L_1 + fL_2 = 0, \quad L'_1 + kL'_2 = 0,$$

deren Parameter der Gleichung $fk + af + bk + c = 0$ genügen. Es ist zu zeigen, daß das Doppelverhältnis von vier Strahlen des einen Büschels gleich dem Doppelverhältnis der entsprechenden Strahlen des andern ist.

11. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln ist das eine vollständig gegeben. Wieviele Strahlen von dem zweiten müssen gegeben sein, damit zu jedem Strahl des ersten Büschels der entsprechende des zweiten gefunden werden kann?

12. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln sind drei Strahlenpaare

$$\begin{cases} L_1 + f_1 L_2 = 0, \\ L'_1 + k_1 L'_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + f_2 L_2 = 0, \\ L'_1 + k_2 L'_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} L_1 + f_3 L_2 = 0, \\ L'_1 + k_3 L'_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Es soll die Relation bestimmt werden, welcher die Parameter je zweier entsprechenden Strahlen genügen müssen.

13. Es ist zu zeigen, daß in jedem von zwei projektivischen Strahlenbüscheln zwei auf einander lotrechte Strahlen existieren, deren entsprechende Strahlen im andern Büschel sich ebenfalls rechtwinklig durchschneiden.

14. Von den beiden projektivischen Strahlenbüscheln

$$2y - x - 6 + f(3y - 2x - 7) = 0,$$
$$y + 2x - 17 + k(2y - 3x + 29) = 0,$$

deren Parametergleichung $f - 2k = 0$ ist, sollen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel bestimmt werden.

15. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel. Es ist zu zeigen, daß das Produkt der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen mit den nicht entsprechenden Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschließen, einen konstanten Wert besitzt.

16. Welche Form können die Gleichungen von zwei projektivischen Strahlenbüscheln annehmen, wenn zwei einander entsprechende Strahlen derselben zusammen fallen?

17. Die beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + f(L_2 x + M_2 y + N_2) = 0,$$
$$L_1 x + M_1 y + N_1 + k(L'_2 x + M'_2 y + N'_2) = 0$$

befinden sich in perspektivischer Lage. Welche entsprechenden Strahlenpaare derselben sind zugleich parallel? Die Parametergleichung sei $af + bk = 0$.

Beispiel. $y - 2x + 3 + f(2y + x - 1) = 0,$
$$y - 2x + 3 + k(y + x + 1) = 0;$$
$$f - 2k = 0.$$

18. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn in den beiden projektivischen Strahlenbüscheln

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + f(L_2 x + M_2 y + N_2) = 0,$$
$$L_1 x + M_1 y + N_1 + k(L'_2 x + M'_2 y + N'_2) = 0$$

jeder Strahl seinem entsprechenden Strahl parallel laufen soll?

19. In dem Büschel $4x + 3y + 1 + f(x - 2y + 5) = 0$ mögen nach einander die Strahlen

$$7x - 3y + 16 = 0, \quad 9x + 4y + 7 = 0, \quad x - y + 3\tfrac{3}{11} = 0$$

folgen. Es ist zu bestimmen, ob sich das Büschel im positiven oder negativen Sinne dreht.

20. Es möge das Büschel $V_1 + f V_2 = 0$ ($V_1 = 0$, $V_2 = 0$ Normalgleichungen der Fundamentalstrahlen) um seinen Mittelpunkt gedreht werden; der Drehungswinkel sei φ. Es ist zu zeigen, daß das Doppelverhältnis von vier Strahlen desselben in der neuen Lage gleich dem Doppelverhältnis derselben Strahlen in der ursprünglichen Lage ist.

21. Gegeben sind die beiden projektivischen Strahlenbüschel $L_1 + f L_2 = 0$, $L'_1 + k L'_2 = 0$, deren Parametergleichung $af + bk = 0$ ist. Es ist zu zeigen, daß die beiden Büschel auch noch projektivisch sind, wenn man das eine Büschel in der Ebene so verschiebt, daß jeder Strahl desselben seiner ursprünglichen Richtung parallel bleibt.

22. Zwei projektivische Strahlenbüschel befinden sich in perspektivischer Lage. Es soll der geometrische Ort des Schnittpunktes zweier entsprechenden Strahlen bestimmt werden.

Beispiel. $5x - 2y + 3 + f(9x + 4y - 1) = 0,$

$$5x - 2y + 3 + k(x - y + 2) = 0;$$

$$7f - 3k = 0.$$

23. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln sind drei entsprechende Strahlenpaare gegeben. Es soll zu einem vierten Strahle des ersten Büschels der entsprechende Strahl des zweiten durch Konstruktion gefunden werden.

24. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln sollen die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel durch Konstruktion gefunden werden.

Konzentrische projektivische Strahlenbüschel.

25. Gegeben sind die beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$L_1 + f L_2 = 0, \quad L'_1 + k L'_2 = 0.$$

Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, wenn dieselben konzentrisch sein, d. h. wenn die Mittelpunkte beider Büschel zusammenfallen sollen?

26. Zu den beiden konzentrischen Strahlenbüscheln

$$2x - y - 9 + f(3x + 2y - 10) = 0,$$
$$5x - y - 21 + k(7x - 3y - 31) = 0$$

gehört der Strahl $23x + 13y - 79 = 0$.

Welche Strahlen entsprechen dem letzteren, je nachdem derselbe dem ersten oder dem zweiten Büschel zugerechnet wird? Die Parametergleichung ist $fk + 2f - 11k - 2 = 0$.

27. Gegeben sind zwei konzentrische Strahlenbüschel

$$L_1 + f L_2 = 0, \quad L'_1 + k L'_2 = 0.$$

Es soll die Gleichung eines dem zweiten Büschel zugehörigen Strahles $L'_1 + k_1 L'_2 = 0$ aus den Gleichungen der Fundamentalstrahlen des ersten Büschels zusammengesetzt werden.

28. Die Gleichungen zweier konzentrischen projektivischen Strahlenbüschel sind $L_1 + f L_2 = 0$, $L'_1 + k L'_2 = 0$, die Parametergleichung $af + bk = 0$.

Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn sich beide Büschel in demselben Sinne, welche, wenn sich beide im entgegengesetzten Sinne drehen sollen?

29. Von zwei projektivischen konzentrischen Strahlenbüscheln sind drei Paare entsprechender Strahlen gegeben. Es soll bestimmt werden, ob sich dieselben in demselben oder im entgegengesetzten Sinne drehen.

Beispiel 1.

$$\begin{cases} 17x + 9y - 59 = 0, \\ 2x - y - 9 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0, \\ 7x - 3y - 31 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + y - 19 = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Beispiel 2.

$$\begin{cases} 23x + 6y + 1 = 0, \\ 26x + y + 6 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0, \\ 7x + y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 4y - 1 = 0, \\ 19x + 5 = 0. \end{cases}$$

30. Wieviele Doppelstrahlen können die beiden konzentrischen projektivischen Strahlenbüschel $L_1 + f L_2 = 0$, $L'_1 + k L'_2 = 0$, deren Parametergleichung $af + bk = 0$ ist, besitzen?

31. Es sollen die Doppelstrahlen der beiden konzentrischen projektivischen Strahlenbüschel

$$17x + 9y - 59 + f(3x + 2y - 10) = 0,$$
$$2x - y - 9 + k(7x - 3y - 31) = 0,$$

deren Parametergleichung $3f + 5k = 0$ ist, bestimmt werden.

32. Von zwei konzentrischen projektivischen Strahlenbüscheln sind drei entsprechende Strahlenpaare gegeben:

$$\begin{cases} 23x + 6y + 1 = 0, \\ 26x + y + 6 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 2y + 3 = 0, \\ 7x + y + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x + 4y - 1 = 0, \\ 19x + 5 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Doppelstrahlen der beiden Büschel?

33. Gegeben sind zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel. Es soll die Lage der Doppelstrahlen derselben zu den Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel bestimmt werden.

34. Welche Form müssen die Gleichungen von zwei konzentrischen projektivischen Strahlenbüscheln besitzen, wenn die Doppelstrahlen derselben als Fundamentalstrahlen angenommen werden?

35. Gegeben sind zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel. Es soll das Doppelverhältnis zweier entsprechenden Strahlen zu den Doppelstrahlen beider Büschel bestimmt werden.

36. Die Gleichungen zweier konzentrischen projektivischen Strahlenbüschel sind

$$3x - 4y + 10 + f(x + y - 2) = 0,$$
$$3x - 4y + 10 - 2f(x + y - 2) = 0,$$

wenn die Doppelstrahlen als Fundamentalstrahlen angesehen werden. Welches sind die Gleichungen der Schenkel der entsprechenden rechten Winkel derselben?

37. Zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel entsprechen den Gleichungen $L_1 + f L_2 = 0$, $L_1 + k L_2 = 0$.

Welche Beziehung muß zwischen den Parametern f und k bestehen, wenn einem beliebigen Strahle s_1, mag man ihn dem einen oder dem andern Büschel zurechnen, stets derselbe Strahl s_2 entspricht?

38. Zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel sind in Involution. Es soll die Lage der Schenkel der entsprechenden rechten Winkel bestimmt werden.

39. Die Gleichungen der Seiten eines vollständigen Vierseits sind:

$$y = 0, \quad y - 3x = 0, \quad 2y + 3x - 6 = 0, \quad y - x + 1 = 0.$$

Der Punkt (ξ, η) sei mit den 6 Ecken dieser Figur verbunden. In welcher Beziehung stehen die Strahlen dieses Büschels zu einander?

40. Gegeben sei ein vollständiges Viereck. Durch einen beliebigen Punkt P seien Parallelen zu den sechs Seiten der Figur gezogen. In welcher Beziehung stehen die Strahlen dieses Büschels zu einander?

Anmerkung. Aufgaben über involutorische Strahlenbüschel siehe Heft I, Nr. 265—283.

Erzeugnisse projektivischer Strahlenbüschel in einer Ebene.

Erklärung. Die Kurve, auf welcher die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektivischen Strahlenbüschel liegen, wird das Erzeugnis der Büschel genannt.

41. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel, in denen zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen. Welches ist das Erzeugnis der beiden Büschel?

42. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die beiden Büschel ähnlich gleich sind?

43. Zwei projektivische Strahlenbüschel

$$L_1 + f L_2 = 0, \quad L'_1 + k L'_2 = 0,$$

deren Parametergleichung $fk + af + bk + c = 0$ ist, befinden sich in schiefer Lage. Welches ist das Erzeugnis derselben?

44. Wie liegen die Mittelpunkte zweier projektivischen Strahlenbüschel zu dem Erzeugnis derselben? In welcher Beziehung stehen ferner diejenigen Strahlen, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechen, zu dem Erzeugnis?

45. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel, in denen nur zwei entsprechende Strahlen einander parallel laufen. Welches ist das Erzeugnis der beiden Büschel? Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten der Büschelgleichungen und der Parametergleichung genügen?

46. Zwei projektivische Strahlenbüschel mögen zwei Paare reeller entsprechenden Parallelstrahlen besitzen. Welches ist das Erzeugnis der beiden Büschel?

47. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel, in denen kein reeller Strahl dem ihm entsprechenden parallel läuft. Auf welcher Kurve liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen?

48. Zwei projektivische Strahlenbüschel entsprechen den Gleichungen

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + f(L_2 x + M_2 y + N_2) = 0,$$
$$L'_1 x + M'_1 y + N'_1 + k(L'_2 x + M'_2 y + N'_2) = 0.$$

Die Parametergleichung ist $af + bk = 0$. Welchen Bedingungen müssen die Konstanten genügen, wenn das Erzeugnis der Büschel ein Kreis sein soll?

49. Es ist zu zeigen, daß ein Kegelschnitt durch fünf Punkte (desselben) vollständig bestimmt ist.

50. Wieviele Kegelschnitte lassen sich durch zwei Punkte, wieviele durch drei Punkte, wieviele durch vier Punkte legen?

51. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln sind drei entsprechende Strahlenpaare gegeben. Es soll zu einem vierten Strahle des ersten Büschels der entsprechende des zweiten Büschels durch Konstruktion gefunden werden, ohne daß beide Büschel in perspektivische Lage gebracht werden.

52. Gegeben sind zwei Strahlenbüschel, von denen jedes einem dritten bekannten Büschel projektivisch ist. Welches ist das Erzeugnis der beiden ersten Strahlenbüschel?

53. Es sollen die Erzeugnisse folgender Paare von projektivischen Strahlenbüscheln bestimmt werden:

$$1)\quad \begin{cases} x - y - 1 + f(2x + y - 3) = 0, \\ x + y + 1 + k(x - 2y + 3) = 0; \\ f - k = 0. \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} 3x - y + 2 + f(5x + 2y - 1) = 0, \\ x + y - 3 + k(x + 12y + 1) = 0; \\ f - 5k = 0. \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} 2x + 3y + 4 + f(5x - y + 1) = 0, \\ x - 2y - 1 + k(2x + 3y + 1) = 0; \\ 81f + 476k = 0. \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} x + 2y - 5 + f(2x + 3y - 1) = 0, \\ 3x + 5y + 1 + k(x + 2y + 2) = 0; \\ f + 2k = 0. \end{cases}$$

54. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Koordinaten $x_1 = 1$, $y_1 = 1$; $x_2 = 4$, $y_2 = 5$ besitzen. Der Abstand zwischen den Punkten, in welchen je zwei entsprechende Strahlen die X-Achse schneiden, möge gleich 1 sein.

Welches ist das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel? Welcher Satz läßt sich aus dem Resultate ableiten?

55. Die Scheitel zweier rechten Winkel besitzen die Koordinaten $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 3$. Die beiden Winkel mögen sich so um ihre Scheitelpunkte drehen, daß der Schnittpunkt des einen Schenkelpaares auf der Y-Achse fortgleitet. Welches ist dann der geometrische Ort des Schnittpunktes der beiden andern Schenkel?

56. Die konstante Grundlinie c eines Dreiecks fällt mit dem positiven Teile der X-Achse, der eine Endpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Zwischen den Winkeln an der Grundlinie besteht die Relation $\sin\beta = \operatorname{tang}\alpha$. Welches ist der geometrische Ort der Spitze des Dreiecks?

57. Von einem Dreieck fällt die Seite c mit dem positiven Teile der X-Achse, der eine Endpunkt derselben mit dem Koordinatenanfangspunkte zusammen. Die Differenz der Winkel an der Grundlinie hat den konstanten Wert δ. Welches ist der geometrische Ort der Spitze C des Dreiecks?

58. Über der konstanten Grundlinie c, welche dieselbe Lage wie in den beiden vorhergehenden Aufgaben haben möge, sind Dreiecke konstruiert, in denen das Produkt der Tangenten der Winkel an der Grundlinie den Wert q besitzt. Auf welcher Kurve liegen die Spitzen C dieser Dreiecke?

59. Durch die beiden Punkte $(+a, 0)$ und $(-a, 0)$ sind Strahlen gelegt. Je zwei entsprechende Strahlen mögen die Y-Achse so schneiden, daß das Produkt der Abschnitte, welche vom Koordinatenanfangspunkte aus gerechnet werden, gleich q^2 ist. Welches ist das Erzeugnis der beiden Büschel?

60. Gegeben sind zwei gerade Linien

$$(G_1)\ 4x - 3y + 12 = 0 \text{ und } (G_2)\ 2x - 5y - 10 = 0,$$

ferner eine Gerade G_3, welche sich um den Punkt $(0, 5)$ dreht. Verbindet man den Schnittpunkt von G_1 und G_3 mit dem Punkte Q_1 $(2, 0)$, ferner den Schnittpunkt von G_2 und G_3 mit Q_2 $(3, 0)$, so werden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte P schneiden. Es soll der geometrische Ort des Punktes P bestimmt werden.

61. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes gesucht werden, welcher die Gerade $y = 0$ im Punkte $(5, 0)$, die Gerade $2y - 3x = 0$ im Punkte $(2, 3)$ berührt und durch den Punkt $x_1 = 7$, $y_1 = 4$ geht.

62. Durch die Punkte P_1 (2, 3), P_2 (3, 7), P_3 (5, 2) ist ein Kegelschnitt zu legen, welcher die X-Achse im Punkte P_4 (3, 0) berührt. Welches ist die Gleichung desselben?

Projektivische Punktreihen in einer Ebene.

Projektivische Punktreihen in schiefer Lage.

63. Gegeben sind die Gleichungen von zwei Punkten

$$A_1 \equiv u a_1 + v b_1 + 1 = 0, \quad A_2 \equiv u a_2 + v b_2 + 1 = 0.$$

Es soll die Gleichung einer Punktreihe bestimmt werden, deren Träger die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte ist.

64. Welche Änderung erfährt die Gleichung einer Punktreihe, wenn der Träger derselben in der Ebene verschoben wird?

65. Zwei Punktreihen besitzen die Gleichungen

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A'_1 + k A'_2 = 0.$$

1. Welcher algebraischen Relation müssen die Parameter f und k genügen, wenn jedem Punkte der einen Reihe nur ein einziger Punkt der zweiten Reihe entsprechen soll? 2. Wie gestaltet sich diese Relation, wenn dem Punkte A_1 der Punkt A'_1, ferner der Punkt A_2 dem Punkte A'_2 entspricht?

66. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A'_1 + k A'_2 = 0.$$

Es ist zu zeigen, daß das Doppelverhältnis von vier Punkten der einen Reihe gleich dem der entsprechenden Punkte der andern Reihe ist.

67. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen

$$3u + 2v + 1 + f(4u - 7v + 1) = 0,$$
$$-5u + 3v + 1 + k(2u + 9v + 1) = 0,$$

deren Parametergleichung $fk + f - 2k + 3 = 0$ ist. Welcher Punkt der zweiten Reihe entspricht dem Punkte $11u - 70v + 1 = 0$ der ersten Reihe?

68. Die Gleichungen zweier projektivischen Punktreihen sind

$$1u + 5v + 1 + f(5u + 1v + 1) = 0,$$
$$3u - 2v + 1 + k(6u + 4v + 1) = 0,$$

die Parametergleichung $fk + 3f - 2k = 0$.

Welche Punkte der Punktreihen entsprechen dem Schnittpunkte der Träger beider Punktreihen, je nachdem derselbe der ersten oder der zweiten Punktreihe zugerechnet wird?

69. Zwei projektivische Punktreihen besitzen die Gleichungen

$$A_1 + fA_2 = 0, \quad A'_1 + kA'_2 = 0,$$

deren Parameter der Relation $fk + af + bk + c = 0$ genügen. Es soll in jeder Punktreihe derjenige Punkt bestimmt werden, welcher dem unendlich fernen Punkte der andern Punktreihe entspricht.

Beispiel. $3u + 2v + 1 + f(4u - 7v + 1) = 0,$
$$-5u + 3v + 1 + k(2u + 9v + 1) = 0;$$
$$fk + 5f - 2k + 3 = 0.$$

70. In der ersten der beiden projektivischen Punktreihen

$$A_1 + fA_2 = 0, \quad A'_1 + kA'_2 = 0$$

liegt der Gegenpunkt in der Unendlichkeit. Wo liegt der Gegenpunkt in der zweiten Punktreihe? Welcher Relation müssen in diesem Falle die Konstanten der Parametergleichung

$$fk + af + bk + c = 0$$

genügen?

71. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen

$$a_1u + b_1v + 1 + f(a_2u + b_2v + 1) = 0,$$
$$a'_1u + b'_1v + 1 + k(a'_2u + b'_2v + 1) = 0,$$

deren Parametergleichung $af + bk = 0$ ist. Welchen Inhalt hat ein Rechteck, welches aus den Abständen je zweier entsprechenden Punkte von den Gegenpunkten ihrer Reihen gebildet ist?

72. Die beiden projektivischen Punktreihen

$$a_1u + b_1v + 1 + f(a_2u + b_2v + 1) = 0,$$
$$a'_1u + b'_1v + 1 + k(a'_2u + b'_2v + 1) = 0$$

mögen ähnlich sein. In welcher Beziehung steht der Abschnitt zwischen zwei Punkten der einen Punktreihe zu dem Abschnitte zwischen den entsprechenden Punkten der andern Punktreihe?

73. Zwischen den Parametern der beiden projektivischen Punktreihen

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$
$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + k(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0$$

besteht die Gleichung $af + bk = 0$. Es soll untersucht werden, ob zwei Punkte der ersten Reihe dieselbe Entfernung von einander haben können, wie die beiden entsprechenden Punkte der zweiten Punktreihe.

74. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen

$$2u + 2v + 1 + f(5u + 6v + 1) = 0,$$
$$1u + 2v + 1 + k(9u + 8v + 1) = 0$$

und die Parametergleichung $f - 2k = 0$. Zu der ersten Punktreihe gehört der Punkt $(P_1)\ 4u + 4\frac{2}{3}v + 1 = 0$. Es soll der zu dieser Reihe gehörige Punkt (P_2) gesucht werden, so daß die Strecke $P_1 P_2$ gleich dem Abstande zwischen den entsprechenden Punkten Q_1 und Q_2 der zweiten Punktreihe ist.

75. Von zwei projektivischen Punktreihen sind drei Punktpaare gegeben:

$$\begin{cases} 5u + 2v + 1 = 0, \\ 2u - 1v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7u + 6v + 1 = 0, \\ 4u - 3v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 6\frac{1}{2}u + 5v + 1 = 0, \\ 3\frac{2}{3}u - 2\frac{2}{3}v + 1 = 0. \end{cases}$$

Wie lautet die Parametergleichung? Zu der ersten Reihe gehört der Punkt $(P_1)\ 6\frac{1}{3}u + 4\frac{2}{3}v + 1 = 0$. Welcher Punkt der zweiten Reihe entspricht demselben? Welches sind die Gleichungen der Gegenpunkte?

76. Von zwei projektivischen Punktreihen sind drei Punktpaare bekannt:

$$\begin{cases} 4u + 1v + 1 = 0, \\ 6u + 11v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\frac{1}{3}u + 1\frac{2}{3}v + 1 = 0, \\ 4u + 7v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3\frac{5}{7}u + 1\frac{2}{7}v + 1 = 0, \\ 5u + 9v + 1 = 0. \end{cases}$$

Es sollen diejenigen Punkte bestimmt werden, welche dem Schnittpunkte der Träger entsprechen, je nachdem man denselben der ersten oder zweiten Punktreihe zurechnet.

77. Die Träger von zwei projektivischen Punktreihen schneiden sich so, daß zwei entsprechende Punkte zusammen fallen. Welche Form können dann die Gleichungen der beiden Punktreihen annehmen?

78. Die Träger der beiden projektivischen Punktreihen

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$

$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + k(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0$$

mögen so liegen, daß in ihrem Schnittpunkte zwei entsprechende Punkte beider Reihen zusammenfallen. Welcher Bedingung müssen in diesem Falle die Konstanten genügen, wenn die Parametergleichung $af + bk = 0$ ist?

79. Zwei projektivische Punktreihen sind durch die Gleichungen

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$

$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + k(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0$$

gegeben. Die Parameter derselben genügen der Gleichung $af + bk = 0$. Durch einen gegebenen Punkt $a_3 u + b_3 v + 1 = 0$ soll ein Strahl gelegt werden, welcher die Träger der Punktreihen in zwei entsprechenden Punkten schneidet.

Beispiel. $2u + 2v + 1 + f(5u + 6v + 1) = 0,$

$$1u + 2v + 1 + k(9u + 8v + 1) = 0;$$

$$f - 2k = 0,$$

$$-\frac{5}{11} u + 3\frac{1}{11} v + 1 = 0.$$

80. Zwei projektivische Punktreihen mögen so liegen, daß ein bestimmter Punkt der einen Reihe mit dem entsprechenden Punkte der zweiten Reihe zusammenfällt. Welche Lage haben die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte?

81. Gegeben sind ein Strahlenbüschel $L_1 + fL_2 = 0$ und eine Punktreihe $A_1 + kA_2 = 0$. Welche algebraische Beziehung muß zwischen den Parametern f und k bestehen, wenn einem Element des einen Systems nur ein einziges Element des andern entsprechen soll?

82. Gegeben sind ein Strahlenbüschel

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + f(L_2 x + M_2 y + N_2) = 0$$

und eine demselben projektivische Punktreihe

$$a_1 u + b_1 v + 1 + k(a_2 u + b_2 v + 1) = 0.$$

Wieviele Strahlen des Büschels werden den Träger der Punktreihe in den ihnen entsprechenden Punkten schneiden?

83. Ein Strahlenbüschel und eine geradlinige Punktreihe sind projektivisch. 1. Welche Werte haben die Konstanten der in Lösung 81 aufgestellten Parametergleichung? 2. Welche Gestalt

wird die Parametergleichung haben müssen, wenn jeder Strahl des Büschels durch den entsprechenden Punkt der Reihe gehen soll?

84. Von zwei projektivischen Punktreihen sind drei Punktpaare gegeben, nämlich von der ersten die Punkte A_1, B_1, C_1, von der zweiten die entsprechenden Punkte A_2, B_2, C_2. Es soll zu einem Punkte D_1 der ersten Reihe der entsprechende der zweiten durch Konstruktion gefunden werden.

85. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln mögen drei Strahlenpaare gegeben sein, nämlich von dem ersten die Strahlen a_1, b_1, c_1, welche durch den Punkt P_1 gehen, von dem zweiten die entsprechenden Strahlen a_2, b_2, c_2, welche durch den Punkt P_2 gehen. Es soll zu einem Strahle d_1 des ersten Büschels der entsprechende des zweiten durch Konstruktion gefunden werden, ohne daß die Büschel vorher in perspektivische Lage gebracht werden.

86. g_1 und g_2 sind die Träger von zwei projektivischen Punktreihen. Der Schnittpunkt zur ersten Reihe gerechnet sei A_1, zur zweiten Reihe gerechnet F_2. Bekannt ist außerdem die Lage von A_2, F_1, B_1 und B_2. Die Gegenpunkte der Punktreihen sollen durch Konstruktion gefunden werden.

Konjektivische Punktreihen.

87. Zwei projektivische Punktreihen

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A'_1 + k A'_2 = 0$$

liegen auf einer geraden Linie. Wie lassen sich die Punkte der zweiten Reihe mit Hilfe der Fundamentalpunkte der ersten darstellen?

Beispiel. $5u + 3v + 1 + f(9u + 2v + 1) = 0,$
$6u + 2\tfrac{3}{4}v + 1 + k(-3u + 5v + 1) = 0.$

88. Zwei konjektivische Punktreihen entsprechen den Gleichungen

$$-2u + \tfrac{3}{2}v + 1 + f(3u + 3v + 1) = 0,$$
$$1u + 2\tfrac{2}{5}v + 1 + k(5u + 3\tfrac{2}{5}v + 1) = 0,$$

die Parametergleichung ist $3f - k = 0$. Auf dem Träger der beiden Punktreihen liegt der Punkt $23u + 9v + 1 = 0$. Welcher Punkt entspricht demselben, je nachdem er der ersten oder der zweiten Punktreihe zugerechnet wird?

89. Von zwei konjektivischen Punktreihen sind drei Punktpaare gegeben:

$$\begin{cases} 1u - 4v + 1 = 0, \\ 8u + 3v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 6u + 1v + 1 = 0, \\ 2u - 3v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 5u + 1 = 0, \\ 4u - 1v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gegenpunkte dieser beiden Punktreihen?

90. Von zwei konjektivischen Punktreihen ist die eine $A, B, C, D \ldots$ vollständig gegeben, von der zweiten dagegen sind nur die drei Punkte A_1, B_1, C_1 bekannt. Es sollen 1. die Lage des Punktes D_1 bestimmt werden, 2. die Gegenpunkte der beiden Punktreihen durch Konstruktion gefunden werden.

91. Gegeben sind zwei konjektivische Punktreihen

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A'_1 + k A'_2 = 0,$$

deren Parameter der Gleichung $af + bk = 0$ genügen. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die beiden Punktreihen in gleichem Sinne, welche, wenn sie in entgegengesetztem Sinne verlaufen sollen?

92. Es soll untersucht werden, ob die folgenden konjektivischen Punktreihen gleichstimmig oder entgegengesetzt verlaufend sind:

$$1) \quad \begin{cases} 5u + 3v + 1 + f(9u + 2v + 1) = 0, \\ 6u + 2\tfrac{3}{4}v + 1 + k(-3u + 5v + 1) = 0; \\ \qquad 2f + 3k = 0. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 1u - 4v + 1 + f(6u + 1v + 1) = 0, \\ 8u + 3v + 1 + k(2u - 3v + 1) = 0; \\ \qquad 5f - 3k = 0. \end{cases}$$

93. Gegeben sind zwei konjektivische Punktreihen, welche den Gleichungen

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A'_1 + k A'_2 = 0$$

entsprechen. Die Parametergleichung ist $af + bk = 0$. Wie viele Doppelpunkte können die beiden Punktreihen besitzen?

94. Von den folgenden konjektivischen Punktreihen sind die Doppelpunkte zu bestimmen:

$$1) \quad \begin{cases} 1u - 4v + 1 + f(6u + 1v + 1) = 0, \\ 8u + 3v + 1 + k(2u - 3v + 1) = 0; \\ \qquad 5f - 3k = 0. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} 1u + 3v + 1 + f(5u - 2v + 1) = 0, \\ \tfrac{11}{3}u - \tfrac{1}{3}v + 1 + k(3u + \tfrac{1}{2}v + 1) = 0; \\ \qquad f + 5k = 0. \end{cases}$$

95. Die Doppelpunkte von zwei konjektivischen Punktreihen mögen als Fundamentalpunkte betrachtet werden. Welches sind die Gleichungen der konjektivischen Reihen?

96. Die Gleichungen zweier konjektivischen Punktreihen sind so aufgestellt, daß die Doppelpunkte derselben die Fundamentalpunkte sind. 1. Welches sind die Gleichungen der Gegenpunkte? 2. Wie liegen die Gegenpunkte zu den Doppelpunkten?

97. Von zwei konjektivischen Punktreihen sind drei Punktpaare A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 gegeben. Die Doppelpunkte der beiden Reihen sollen durch Konstruktion gefunden werden.

98. Gegeben sind zwei konjektivische Punktreihen. Es soll der Wert bestimmt werden, welchen das Doppelverhältnis von zwei entsprechenden Punkten der Punktreihen zu den Doppelpunkten besitzt.

99. Von zwei konjektivischen Punktreihen wird die eine so längs des Trägers verschoben, daß die Gegenpunkte zusammenfallen. Welche Form erhalten dann die Gleichungen der beiden Punktreihen, wenn die Doppelpunkte als Fundamentalpunkte angenommen werden?

100. In zwei konjektivischen Punktreihen möge einem beliebigen Punkte A_1, gleichviel ob derselbe der einen oder andern Punktreihe zugerechnet wird, immer derselbe Punkt A_2 entsprechen. Wie liegen die Gegenpunkte dieser beiden Punktreihen?

101. Die Doppelpunkte einer involutorischen Punktreihe sind

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0.$$

Auf dem Träger befindet sich der Punkt $A_3 \equiv a_3 u + b_3 v + 1 = 0$.

Es sollen zwei zugeordnete Punkte der Reihe bestimmt werden, deren Abstände von dem Punkte A_3 einander gleich sind.

Beispiel. $A_1 \equiv -2u + 3v + 1 = 0, \quad A_2 \equiv 3u + 8v + 1 = 0,$
$$A_3 \equiv 6u + 11v + 1 = 0.$$

Anmerkung. Aufgaben über involutorische Punktreihen siehe Heft I, Aufg. 341—351.

Erzeugnisse projektivischer Punktreihen in einer Ebene.

Erklärung. Verbindet man je zwei entsprechende Punkte von zwei projektivischen Punktreihen durch gerade Linien, so wird das System der Geraden von einer Kurve eingehüllt, welche das Erzeugnis der beiden projektivischen Punktreihen genannt wird.

102. Zwei projektivische Punktreihen

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A'_1 + k A'_2 = 0$$

befinden sich in schiefer Lage. Die Parametergleichung ist $fk + af + bk + c = 0$. Welches ist das Erzeugnis der beiden Punktreihen?

103. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen in schiefer Lage. In welcher Beziehung stehen die Träger der beiden Punktreihen zu dem Erzeugnis derselben? Welche Bedeutung haben die Punkte der Reihen, welche dem Schnittpunkte der Träger beider Punktreihen entsprechen?

104. Durch wie viele Tangenten ist ein Kegelschnitt vollständig bestimmt?

105. Wie gestaltet sich das Erzeugnis zweier projektivischen Punktreihen, wenn dieselben in perspektivische Lage gebracht werden?

106. Zwei projektivische Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage. Durch welche einfache Konstruktion läßt sich das Erzeugnis derselben finden?

107. Zwei projektivische Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage. Welche Veränderung erfährt die Lage des Erzeugnisses, wenn der eine Träger um den Schnittpunkt gedreht wird?

108. Gegeben sind zwei projektivische ähnliche Punktreihen in schiefer Lage, deren Gegenpunkte in der Unendlichkeit liegen. Es soll das Erzeugnis derselben bestimmt werden.

109. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen in schiefer Lage, und zwar möge in jeder der Punkt, welcher dem Schnittpunkte der Träger entspricht, auf der Strecke zwischen diesem Schnittpunkte und dem Gegenpunkte liegen. Welches wird das Erzeugnis dieser beiden Punktreihen sein?

110. Es soll das Erzeugnis von zwei projektivischen Punktreihen, welche sich in schiefer Lage befinden, bestimmt werden, wenn in jeder Reihe derjenige Punkt, welcher dem Schnittpunkte der Träger entspricht, außerhalb der Strecke zwischen Schnittpunkt und Gegenpunkt liegt.

111. Gegeben sind zwei projektivische Punktreihen. Der Gegenpunkt der einen Reihe liegt im Schnittpunkte der Träger. Welches ist das Erzeugnis der beiden Punktreihen? Welche Bedeutung hat der eine Träger?

112. Von zwei projektivischen Punktreihen fallen die beiden Gegenpunkte mit dem Schnittpunkte der Träger zusammen. Welche Kurve hüllt die Strahlen ein, von denen jeder zwei entsprechende Punkte der Reihen verbindet?

113. Die Gleichungen zweier projektivischen Punktreihen, welche sich in schiefer Lage befinden, sind

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$
$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + k(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0,$$

die Parametergleichung $af + bk = 0$.

Welcher Bedingung müssen die Konstanten dieser Gleichungen genügen, wenn das Erzeugnis der Punktreihen ein Kreis sein soll?

114. Es sollen die Erzeugnisse folgender Paare von projektivischen Punktreihen bestimmt werden:

1) $$\begin{cases} 2u + 2v + 1 + f(5u + 6v + 1) = 0, \\ 1u + 2v + 1 + k(9u + 8v + 1) = 0; \\ f - 2k = 0. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 1u + 5v + 1 + f(5u + 1v + 1) = 0, \\ 3u - 2v + 1 + k(6u + 4v + 1) = 0; \\ f - k = 0. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} 3u - 2v + 1 + f(8u + 5v + 1) = 0, \\ 3u - 2v + 1 + k(1u - 1v + 1) = 0; \\ f + k + 1 = 0. \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} 3u + 4v + 1 + f(7u + 5v + 1) = 0, \\ 3u + 4v + 1 + k(-2u + 1v + 1) = 0; \\ 3f - k = 0. \end{cases}$$

115. Gegeben ist der Punkt P (10, 10) und die beiden Geraden $2y - x = 0$, $y - 3x = 0$. Im Punkte P liegt der Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel die gegebenen Geraden in den Punkten Q und R schneiden, sodaß PQR ein rechtwinkliges Dreieck ist. Welche Kurve hüllt die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke ein, die man erhält, wenn der rechte Winkel um P gedreht wird?

116. Auf der Geraden $y - x = 0$ liegt der Scheitel P eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel der Y-Achse parallel läuft und die Gerade $y - 2x - 3 = 0$ in Q schneidet, während der andere Schenkel die Gerade $y - \frac{1}{3}x + 1 = 0$ in R trifft. Welche Kurve

hüllt die verschiedenen Lagen des Strahles QR ein, wenn der Scheitel P längs der Geraden $y - x = 0$ fortrückt?

117. Gegeben sind das Strahlenbüschel

$$3y - x - 7 + f(y - 2x + 1) = 0$$

und die Punktreihe

$$3u + 2v + 1 + k(5u + 5v + 1) = 0.$$

Zwischen den beiden Parametern bestehe die Relation $2f - k = 0$, sodaß jedem Punkte der Reihe ein bestimmter Strahl des Büschels entspricht. Von jedem Punkte der Reihe sei eine Parallele zu dem entsprechenden Strahle des Büschels gezogen. Welche Kurve hüllt diese Parallelen ein?

118. Gegeben sei das Strahlenbüschel und die Punktreihe der vorhergehenden Aufgabe und die zugehörige Parametergleichung. Von jedem Punkte der Reihe sei ein Lot auf den entsprechenden Strahl des Büschels gefällt. Welche Kurve hüllt diese Lote ein?

119. Der eine Schenkel eines konstanten Winkels φ dreht sich um den Koordinatenanfangspunkt, während sich der Scheitel auf der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ fortbewegt. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen des zweiten Schenkels ein?

120. Zwei Gerade g_1 und g_2 werden von einer dritten Geraden g_3 in den Punkten A und B geschnitten. Von A aus sei auf der Geraden g_1 die Strecke a, von B aus auf g_2 die Strecke b abgetragen und die beiden Endpunkte der Abschnitte durch eine Gerade g_4 verbunden. Welche Kurve hüllen die verschiedenen Lagen von g_4 ein, wenn g_3 um einen festen Punkt P gedreht wird?

121. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes bestimmt werden, der von den fünf geraden Linien

$$y + x - 6 = 0, \quad y - 2x + 8 = 0, \quad 2y + 7x - 17 = 0,$$
$$y - 3x + 14 = 0, \quad y - 2 = 0$$

berührt wird.

122. Man soll die Gleichung eines Kegelschnittes finden, welcher von der Geraden $y - 2x + 8 = 0$ im Punkte $\frac{23}{4}u + \frac{7}{2}v + 1 = 0$ und außerdem von den drei Geraden

$$y + x - 1 = 0, \quad 17y - 46x + 214 = 0, \quad y - x + 3 = 0$$

berührt wird.

Gebilde zweiter Ordnung.

Punktreihen zweiter Ordnung.

123. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel erster Ordnung in schiefer Lage:

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + f(L_2 x + M_2 y + N_2) = 0,$$
$$L'_1 x + M'_1 y + N'_1 + f(L'_2 x + M'_2 y + N'_2) = 0.$$

Welches ist die Gleichung eines beliebigen Punktes, der dem Erzeugnis der beiden Büschel angehört?

Beispiel. $x - y - 1 + f(2x + y + 3) = 0,$
$5x + 2y - 3 + f(x + y + 2) = 0.$

124. Wie läßt sich mit Hilfe von gegebenen Punkten die Gleichung einer Punktreihe zweiter Ordnung bestimmen? Wie viele Punkte müssen gegeben sein? Wie liegen die gegebenen Punkte zu der Punktreihe zweiter Ordnung? Welches sind die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Reihe?

125. Mit Hilfe der drei Punkte

$$3u + 5v + 1 = 0, \quad 1u + 1v + 1 = 0, \quad 2u - 1v + 1 = 0$$

soll die Gleichung einer Punktreihe zweiter Ordnung bestimmt werden, zu welcher der erste und dritte Punkt gehören. Welches ist die Gleichung desjenigen Punktes der Reihe, der dem Parameterwerte $f = 2$ entspricht?

126. Die Gleichung einer Punktreihe zweiter Ordnung ist

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1)f + (5u - 2v + 1)f^2 = 0.$$

Welches ist die Gleichung des Kegelschnittes, auf dem die Punkte der Reihe liegen?

127. Die Koordinaten eines Punktes einer Punktreihe zweiter Ordnung sind:

$$x = \frac{1 - f - f^2}{1 + f + f^2}, \quad y = \frac{1 + 2f - f^2}{1 + f + f^2}.$$

Welches ist die Gleichung des Trägers der Punktreihe in Punktkoordinaten?

128. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn der Träger der Punktreihe

$$a_0 u + b_0 v + c_0 + (a_1 u + b_1 v + c_1) f + (a_2 u + b_2 v + c_2) f^2 = 0$$

mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen soll?

129. Von einer Punktreihe zweiter Ordnung sind fünf Punkte gegeben, nämlich:

$$a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad a_2 u + b_2 v + 1 = 0, \quad a_3 u + b_3 v + 1 = 0,$$
$$a_4 u + b_4 v + 1 = 0, \quad a_5 u + b_5 v + 1 = 0.$$

Wie läßt sich die Gleichung der Punktreihe entwickeln, wenn die beiden ersten Punkte als Fundamentalpunkte betrachtet werden?

130. Gegeben sind sechs Punkte:

$$a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad a_2 u + b_2 v + 1 = 0, \quad a_3 u + b_3 v + 1 = 0,$$
$$a_4 u + b_4 v + 1 = 0, \quad a_5 u + b_5 v + 1 = 0, \quad a_6 u + b_6 v + 1 = 0.$$

Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn dieselben einer Punktreihe zweiter Ordnung angehören sollen?

131. Welches sind die Koordinaten einer Geraden, welche zwei Punkte der Punktreihe zweiter Ordnung

$$a_0 u + b_0 v + 1 + (a_1 u + b_1 v + 1) f + (a_2 u + b_2 v + 1) f^2 = 0$$

verbindet?

132. Welches sind die Koordinaten einer Geraden, welche den Träger einer Punktreihe zweiter Ordnung in einem bestimmten Punkte berühren soll?

133. Gegeben ist eine Punktreihe zweiter Ordnung

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0$$

und die Koordinaten einer Geraden u', v'. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die Gerade Tangente des Trägers der Punktreihe sein soll?

134. Von einer Punktreihe zweiter Ordnung sind vier Punkte A, B, C, D gegeben. Es soll das Doppelverhältnis dieser Punkte bestimmt werden.

135. Auf einer Punktreihe zweiter Ordnung sind drei Punkte A, B und C gegeben. Wie läßt sich der dem Punkte B zugeordnete vierte harmonische Punkt finden? Welches ist die Gleichung desselben?

136. Von einer Punktreihe zweiter Ordnung sind vier harmonische Punkte A, B, C, D gegeben, von denen A und C, ferner B und D konjugiert sind. Man ziehe die Strahlen AB, AC, AD und bestimme den zu AC konjugierten harmonischen Strahl.

137. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die Punktreihe zweiter Ordnung $A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0$ dem Strahlenbüschel erster Ordnung $L_1 + k L_2 = 0$ projektivisch sein soll?

138. Gegeben ist das Strahlenbüschel

$$6x + y - 1 + f(x - y + 3) = 0$$

und die Punktreihe zweiter Ordnung

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1) f + (5u - 2v + 1) f^2 = 0.$$

Welcher Punkt der Reihe entspricht dem Strahle $8x - y + 5 = 0$ des Büschels?

139. Die Punktreihe zweiter Ordnung $A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0$ ist dem Strahlenbüschel erster Ordnung $L_1 + f L_2 = 0$ projektivisch. Wie viele Strahlen des Büschels gehen durch die entsprechenden Punkte der Reihe zweiter Ordnung? Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt gehen soll?

140. Das Strahlenbüschel erster Ordnung

$$y - 3x + 8 + f(2y - x - 9) = 0$$

ist der Punktreihe zweiter Ordnung

$$(3u + 1v + 1) + (2u + 1v + 1) f + (5u - 2v + 1) f^2 = 0$$

projektivisch. Es sollen die Strahlen des Büschels bestimmt werden, welche durch die entsprechenden Punkte der Reihe hindurchgehen.

141. Gegeben ist eine Punktreihe zweiter Ordnung

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0$$

und eine Punktreihe erster Ordnung $B_0 + k B_1 = 0$.

Welcher Bedingungsgleichung müssen die Parameter f und k genügen, wenn die beiden Punktreihen projektivisch sein sollen?

142. Gegeben seien die beiden projektivischen Punktreihen:

$$3u + 2v + 1 + (1u - 10v + 1) f + (6u - 5v + 1) f^2 = 0,$$
$$5u + 2v + 1 + f(3u - 1v + 1) = 0.$$

Die gerade Linie, deren Koordinaten $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ sind, schneidet den Träger der Punktreihe zweiter Ordnung in zwei Punkten. Welche Punkte der Punktreihe erster Ordnung entsprechen den beiden Schnittpunkten?

143. Die beiden Punktreihen

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0 \text{ und } B_0 + B_1 f = 0$$

sind projektivisch. Es mögen je zwei entsprechende Punkte dieser

Reihen durch eine gerade Linie verbunden werden. Von welcher Kurve werden diese Strahlen eingehüllt?

144. Eine Punktreihe zweiter Ordnung möge das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel $L_1 + f L_2 = 0$, $L'_1 + f L'_2 = 0$ sein. Wird durch die Büschel die Gerade $Ax + By + C = 0$ gelegt, so wird diese Gerade in zwei konjektivischen Punktreihen erster Ordnung geschnitten, und zwar wird jedem Punktpaare dieser Reihen ein einziger Punkt der Punktreihe zweiter Ordnung entsprechen. Es sollen die Doppelpunkte der konjektivischen Punktreihen bestimmt werden.

145. Zwei projektivische Punktreihen zweiter Ordnung entsprechen den Gleichungen:

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1)f + (5u - 2v + 1)f^2 = 0,$$
$$1u - 2v + 1 + (3u + 2v + 1)f + (7u + 5v + 1)f^2 = 0.$$

Zu der ersten dieser Punktreihen gehört der Punkt

$$4\tfrac{2}{13}u - 1\tfrac{1}{13}v + 1 = 0.$$

Welcher Punkt der zweiten Punktreihe entspricht demselben?

146. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die beiden projektivischen Punktreihen zweiter Ordnung

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0,$$
$$A'_0 + A'_1 f + A'_2 f^2 = 0$$

auf demselben Kegelschnitte liegen sollen?

147. Wie viele Punktpaare zweier projektivischen Punktreihen zweiter Ordnung auf einem Kegelschnitte müssen gegeben sein, wenn durch dieselben die beiden Punktreihen selbst bestimmt sein sollen? Wie viele Doppelpunkte können diese beiden Punktreihen besitzen?

148. Von zwei projektivischen Punktreihen zweiter Ordnung, die auf einem Kegelschnitte liegen, ist die erste vollständig gegeben, von der zweiten ist die Lage der Punkte A_1, B_1, C_1 bekannt. Es sollen durch Konstruktion 1. der Punkt D_1, 2. die Doppelpunkte ermittelt werden.

149. Zwei projektivische Punktreihen zweiter Ordnung, welche auf demselben Kegelschnitte liegen, entsprechen den Gleichungen:

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0,$$
$$A_0 + A_1 k + A_2 k^2 = 0.$$

Die Parametergleichung ist $af + bk = 0$. Welche Bedeutung haben die Punkte $A_0 = 0$, $A_2 = 0$ als Punkte der beiden Punktreihen?

150. Von zwei projektivischen Punktreihen zweiter Ordnung, die sich auf demselben Träger befinden, sind drei Punktpaare gegeben:

$$\begin{cases} 2u + 1\frac{2}{3}v + 1 = 0, \\ 1\frac{6}{7}u + \frac{3}{7}v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\frac{2}{7}u + 3v + 1 = 0, \\ 2u + 1\frac{2}{3}v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1\frac{6}{7}u + \frac{3}{7}v + 1 = 0, \\ 1\frac{6}{7}u - \frac{1}{3}v + 1 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen der beiden projektivischen Punktreihen? Welches sind die Gleichungen der Doppelpunkte? Auf welcher Kurve liegen die beiden projektivischen Punktreihen?

151. Von zwei projektivischen Punktreihen zweiter Ordnung, die sich auf demselben Träger befinden, sind die beiden Doppelpunkte

$$3u + 1v + 1 = 0 \quad \text{und} \quad 9u + 2v + 1 = 0,$$

ferner das Punktpaar

$$\begin{cases} 5\frac{2}{3}u + \frac{2}{3}v + 1 = 0, \\ 7\frac{8}{13}u + 1\frac{3}{13}v + 1 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zu bestimmen sind a) die Gleichungen der beiden Punktreihen, b) die Parametergleichung, c) die Gleichung des Trägers der Punktreihen.

152. Auf einem gegebenen Kegelschnitte K sind von zwei projektivischen Punktreihen zweiter Ordnung die beiden Doppelpunkte P und Q und die beiden einander entsprechenden Punkte A und A_1 gegeben. Es soll durch Konstruktion der dem gegebenen Punkte B entsprechende Punkt B_1 bestimmt werden.

153. Gegeben sei ein Kegelschnitt K und die beiden festen Punkte P_1 und P_2. Zieht man durch P_1 und P_2 Strahlen, welche sich in einem Punkte des Kegelschnittes schneiden und läßt diese Strahlen sich um P_1 und P_2 drehen, so bilden die zweiten Durchschnittspunkte mit dem Kegelschnitte zwei projektivische Punktreihen. Wie findet man die Doppelpunkte der Punktreihen?

154. Zwei projektivische Punktreihen zweiter Ordnung auf einem Kegelschnitte entsprechen den Gleichungen

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0, \quad A_0 + A_1 mf + A_2 m^2 f^2 = 0.$$

Es mögen je zwei entsprechende Punkte durch eine Gerade verbunden werden. Welches wird die Gleichung der Enveloppe dieser Geraden sein?

Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

155. Zwei projektivische Punktreihen entsprechen den Gleichungen:

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$
$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + f(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0.$$

Welches ist die Gleichung einer Geraden, die zwei entsprechende Punkte der Reihen miteinander verbindet?

Beispiel. $2u + 2v + 1 + f(5u + 6v + 1) = 0,$
$1u + 2v + 1 + f(9u + 8v + 1) = 0.$

156. Durch wie viel gerade Linien läßt sich die Gleichung eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung bestimmen?

157. In welchen Punkten schneidet ein beliebiger Strahl des Büschels zweiter Ordnung $L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$ die Fundamentalstrahlen $L_0 = 0$, $L_1 = 0$, $L_2 = 0$?

158. Gegeben ist das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0.$$

Es soll die Gleichung der Kurve bestimmt werden, welche die Strahlen des Büschels einhüllt.

Beispiel. $2y - 7x + 5 + (y + 3x - 17)f + (4y - x - 3)f^2 = 0.$

159. In welcher Beziehung stehen die Fundamentalstrahlen des Büschels zweiter Ordnung $L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$ zu der Enveloppe der Strahlen?

160. Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung entspricht der Gleichung

$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) f + (L_2 x + M_2 y + N_2) f^2 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten eines beliebigen Strahles des Büschels bestimmt werden.

161. Gegeben ist das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$$

und der Punkt $P(x', y')$. Es soll bestimmt werden, wie viele Strahlen des Büschels durch den Punkt P gehen.

162. Zu dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$x - y + 1 + (3x + 2y + 5) f + (2x - 5y + 3) f^2 = 0$$

gehört der Strahl $15x - 17y + 23 = 0$. Durch den Punkt P des letzteren, dessen Abscisse 3 ist, soll der zweite Strahl des Büschels gelegt werden. Welches ist die Gleichung desselben?

163. Gegeben ist das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) f + (L_2 x + M_2 y + N_2) f^2 = 0.$$

Es soll die Gleichung des Berührungspunktes eines Strahles gefunden werden, dessen Parameter f_1 ist.

Beispiel. $x - y + 1 + (3x + 2y + 5) f + (2x - 5y + 3) f^2 = 0,$

$$f_1 = 2.$$

164. Von dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$$

sind vier Strahlen

$$L_0 + L_1 f_1 + L_2 f_1^2 = 0, \quad L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_3 + L_2 f_3^2 = 0, \quad L_0 + L_1 f_4 + L_2 f_4^2 = 0$$

gegeben. Es soll der Wert des Doppelverhältnisses dieser vier Strahlen bestimmt werden.

165. Zu dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$2x + y - 3 + (5x + 3y + 1) f + (x + y + 1) f^2 = 0$$

gehören die drei Strahlen

$$8x + 5y - 1 = 0, \quad 26x + 19y + 9 = 0, \quad 2x + y + 3 = 0.$$

Es mögen die beiden ersten Strahlen als zugeordnete betrachtet werden. Welches ist der dem dritten Strahle zugeordnete harmonische Strahl?

166. Gegeben ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Es soll zu drei bestimmten Strahlen desselben durch Konstruktion der vierte harmonische Strahl gefunden werden.

167. Durch wie viele Strahlen ist ein Büschel zweiter Ordnung vollständig bestimmt?

168. Wie lassen sich Punktreihen erster Ordnung zeichnen, die einem gegebenen Strahlenbüschel zweiter Ordnung projektivisch sind?

169. Das Büschel zweiter Ordnung

$$2x - y + 1 + (x + y + 1) f + (3x + 5y + 1) f^2 = 0$$

und die Punktreihe

$$4u + 3v + 1 + (1u - 1v + 1) f = 0$$

sind projektivisch. Zu dem Büschel gehört der Strahl

$$82x + 129y + 31 = 0.$$

Es soll der Punkt der Reihe bestimmt werden, welcher diesem Strahle entspricht.

170. Gegeben ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung und eine ihm projektivische Punktreihe erster Ordnung. Wie viele Strahlen des Büschels gehen durch die ihnen entsprechenden Punkte der Reihe?

171. Das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$(x - y + 1) + (2x + y + 3)f + (3x - 2y + 4)f^2 = 0$$

und die Punktreihe erster Ordnung

$$5u + 6v + 1 + (2u + 11v + 1)f = 0$$

sind projektivisch. Bestimme die Strahlen des Büschels, welche durch die entsprechenden Punkte der Punktreihe gehen.

172. Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung besitzt die Gleichung:

$$9x + 2y - 1 + (3x - y - 1)f + (x + y + 1)f^2 = 0,$$

ein demselben projektivisches Büschel erster Ordnung dagegen die Gleichung: $x + 2y + 1 + (2x + y + 1)f = 0$.

Es sollen die Strahlen des Büschels zweiter Ordnung bestimmt werden, welche durch den Punkt $x_1 = 0$, $y_1 = -\frac{1}{4}$ gehen, ferner die Strahlen des Büschels erster Ordnung, welche denselben entsprechen.

173. Ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung und ein Strahlenbüschel erster Ordnung sind projektivisch. Wie viele Strahlen des einen Büschels können mit den entsprechenden Strahlen des andern zusammenfallen? Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten der Gleichungen beider Büschel genügen, wenn ein solches Zusammenfallen stattfinden soll?

174. Das Strahlenbüschel zweiter Ordnung $L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$ und das Strahlenbüschel erster Ordnung $L' + fL'' = 0$ sind projektivisch. Auf welcher Kurve liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen dieser beiden Büschel?

175. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn zwei Strahlen des einen Büschels mit den entsprechenden des andern Büschels zusammenfallen?

176. Das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$2x + y - 3 + (5x + 3y + 1)f + (x + y + 1)f^2 = 0$$

und die Punktreihe zweiter Ordnung

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1)f + (5u - 2v + 1)f^2 = 0$$

sind projektivisch. Welches sind die Gleichungen der Strahlen, die durch den Punkt $-\frac{2}{7}u + \frac{1}{7}v + 1 = 0$ gehen? Welches ist

die Gleichung der Geraden, auf welcher die beiden entsprechenden Punkte der Punktreihe liegen?

177. Das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f + (L_2x + M_2y + N_2)f^2 = 0$$

ist der Punktreihe zweiter Ordnung

$$(a_0u + b_0v + 1) + (a_1u + b_1v + 1)f + (a_2u + b_2v + 1)f^2 = 0$$

projektivisch. Wie viele Strahlen des Büschels können durch die entsprechenden Punkte der Punktreihe gehen?

178. Gegeben ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f + (L_2x + M_2y + N_2)f^2 = 0.$$

Es soll die Gleichung der Punkte bestimmt werden, in denen die Strahlen des Büschels die Enveloppe berühren. In welcher Beziehung stehen die Strahlen zu den Berührungspunkten?

179. Zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung entsprechen den beiden Gleichungen:

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f + (L_2x + M_2y + N_2)f^2 = 0,$$
$$L'_0x + M'_0y + N'_0 + (L'_1x + M'_1y + N'_1)f + (L'_2x + M'_2y + N'_2)f^2 = 0.$$

Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn entsprechende Strahlen der beiden Büschel zusammenfallen sollen? Welche Folgerung läßt sich daraus für die gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte ziehen?

180. Die beiden Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$x - y - 1 + (3x + y + 2)f + (x - 3y - 2)f^2 = 0,$$
$$5x + 3y + 1 + (2x + 3y + 1)f + (x + y + 1)f^2 = 0$$

sind projektivisch. Welche Strahlen des ersten Büschels gehen durch den Punkt $4u + 11v - 13 = 0$? In welchem Punkte schneiden sich die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels?

181. Zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung mögen projektivisch sein. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen?

182. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn die beiden projektivischen Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1f + L_2f^2 = 0, \quad L'_0 + L'_1f + L'_2f^2 = 0$$

denselben Kegelschnitt als Enveloppe haben sollen?

Wie viele reelle Doppelstrahlen können die Büschel in diesem Falle besitzen?

183. Die beiden Strahlenbüschel

$$x - y - 1 + (3x + y + 2)\,f + (x - 3y - 2)\,f^2 = 0,$$
$$-5x + 3y + 1 + (5x - 9y - 4)\,f + (x + 15y + 13)\,f^2 = 0$$

sind projektivisch und werden von demselben Kegelschnitt eingehüllt. Es sollen die Doppelstrahlen der Büschel bestimmt werden.

184. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung, welche dieselbe Enveloppe haben, sind gegeben die beiden Doppelstrahlen

$$4x - y + 3 = 0, \quad 7x + 3y + 2 = 0$$

und ein Strahlenpaar

$$\begin{cases} 70x + 29y + 12 = 0, \\ 580x + 251y + 138 = 0. \end{cases}$$

Betrachtet man die beiden Doppelstrahlen als Fundamentalstrahlen der Büschel, so erhält man aus den Gleichungen der Büschel die des Strahlenpaares für $f = 3$. Es sollen die Gleichungen der beiden Büschel bestimmt werden.

185. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung, welche dieselbe Enveloppe haben, sind drei Strahlenpaare gegeben:

$$\begin{cases} 5x - 3y - 1 = 0, \\ 11x - 11y - 5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y + 5 = 0, \\ x + 15y - 13 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 11x - 11y - 5 = 0, \\ 29x - 45y - 25 = 0. \end{cases}$$

Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen? Welches sind die Gleichungen der beiden Büschel? Von welcher Kurve werden die beiden Büschel eingehüllt?

186. Zwei projektivische Strahlenbüschel zweiter Ordnung entsprechen den Gleichungen:

$$x - y - 1 + (3x + y + 2)\,f + (x - 3y - 2)\,f^2 = 0,$$
$$4x - 4y - 4 + (6x + 2y + 4)\,f + (x - 3y - 2)\,f^2 = 0.$$

Es soll der geometrische Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen bestimmt werden.

187. Gegeben ist ein Kegelschnitt K. Es sollen um denselben zwei projektivische Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelegt werden.

188. Von zwei projektivischen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung sind drei Strahlenpaare t_1, t_2, t_3 und t'_1, t'_2, t'_3 gegeben. Es soll zu dem Strahl t_4 des ersten Büschels der entsprechende des zweiten gefunden werden. Welche Lage haben die Doppelstrahlen?

Involutorische Punktreihen und Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

189. Den Gleichungen

$$B_0 + B_1 f + B_2 f^2 = 0, \quad B_0 + B_1 k + B_2 k^2 = 0$$

entsprechen zwei projektivische Punktreihen oder Strahlenbüschel zweiter Ordnung, jenachdem $B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ Punktgleichungen oder Liniengleichungen sind. Welche Beziehung muß zwischen den Parametern f und k bestehen, wenn einem Elemente P des einen Gebildes ein bestimmtes Element Q des zweiten entspricht und umgekehrt dem Elemente Q, wenn es dem ersten Gebilde zugerechnet wird, das Element P des zweiten Gebildes entspricht?

190. Zwei projektivische Punktreihen resp. Strahlenbüschel zweiter Ordnung entsprechen den Gleichungen

$$B_0 + B_1 f + B_2 f^2 = 0, \quad B_0 + B_1 k + B_2 k^2 = 0.$$

Welcher Bedingung müssen die Parameter f_1, k_1; f_2, k_2; f_3, k_3 genügen, wenn die zugehörenden Punkte resp. Strahlen in Involution sein sollen?

191. Zu den beiden projektivischen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung

$$2x - y + 1 + (x + y + 1) f + (3x + 5y + 1) f^2 = 0,$$
$$2x - y + 1 + (x + y + 1) k + (3x + 5y + 1) k^2 = 0$$

gehören die drei Strahlenpaare

$$\begin{cases} 6x + 5y + 3 = 0, \\ 32x + 47y + 13 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 3y + 1 = 0, \\ 186x + 257y + 79 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 17y + 3 = 0, \\ 311x + 425y + 133 = 0. \end{cases}$$

Es soll nachgewiesen werden, daß die beiden Strahlenbüschel in Involution sind. Wie lautet die Parametergleichung?

192. Gegeben sind die beiden involutorischen Punktreihen zweiter Ordnung:

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1) f + (5u - 2v + 1) f^2 = 0,$$
$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1) k + (5u - 2v + 1) k^2 = 0,$$

deren Parameter der Gleichung $fk + (f + k) - 3 = 0$ genügen. Zu einer der Punktreihen gehört der Punkt $\frac{27}{7}u - \frac{5}{7}v + 1 = 0$. Welcher Punkt der andern Punktreihe entspricht demselben?

193. Zu den beiden involutorischen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung

$$x - y - 1 + (3x + y + 2) f + (x - 3y - 2) f^2 = 0,$$
$$x - y - 1 + (3x + y + 2) k + (x - 3y - 2) k^2 = 0$$

gehören die beiden Strahlenpaare

$$\begin{cases} 11x - 11y - 5 = 0, \\ x - y - 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + 5y + 5 = 0, \\ 31x - 25y - 10 = 0. \end{cases}$$

Welches ist die Parametergleichung? Wie viele Strahlen des einen Büschels stehen auf den entsprechenden des andern lotrecht?

194. Zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung entsprechen den Gleichungen

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0, \quad L_0 + L_1 k + L_2 k^2 = 0,$$

wenn f und k der Relation $fk - (f + k) a + b = 0$ genügen. Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen?

Beispiel. $L_0 \equiv 2y - 7x + 5$, $L_1 \equiv y + 3x - 17$, $L_2 \equiv 4y - x - 3$;
$$fk - (f + k) - 3 = 0.$$

195. Gegeben sind zwei involutorische Punktreihen zweiter Ordnung

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1) f + (5u - 2v + 1) f^2 = 0,$$
$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1) k + (5u - 2v + 1) k^2 = 0$$

und die dazugehörige Parametergleichung $fk + 3(f + k) - 7 = 0$. Es sollen die Gleichungen der Doppelpunkte bestimmt werden.

196. Welche Beziehung muß zwischen den Parametern der involutorischen Strahlenbüschel resp. Punktreihen zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0, \quad L_0 + L_1 k + L_2 k^2 = 0$$

bestehen, wenn $L_0 = 0$, $L_2 = 0$ die Gleichungen der Doppelstrahlen resp. Doppelpunkte sind?

197. Die beiden Geraden

$$2x + y - 1 = 0, \quad x + y - 5 = 0$$

mögen die Doppelstrahlen zweier involutorischen Strahlenbüschel zweiter Ordnung sein, welche von dem Kegelschnitt

$$7x^2 + 8xy - 50x - 36y + 11 = 0$$

umhüllt werden. Welches sind die Gleichungen der beiden Büschel?

198. Die beiden Geradenpaare

$$\begin{cases} 11x + 8y - 11 = 0, \\ 7x + 4y + 9 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 4y - 3 = 0, \\ 2x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

gehören zwei involutorischen Strahlenbüscheln zweiter Ordnung an, welche von dem Kegelschnitt

$$7x^2 + 18xy + 7y^2 + 30x + 14y - 37 = 0$$

eingehüllt werden. Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen? Welches die Gleichungen der beiden Büschel?

199. Gegeben sind zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Welche Bedingung muß erfüllt sein, 1. wenn die beiden Doppelstrahlen parallel laufen sollen? 2. wenn die beiden Doppelstrahlen sich rechtwinklig durchschneiden sollen?

200. Von zwei involutorischen Punktreihen zweiter Ordnung sind die Doppelpunkte

$$2u - 7v + 1 = 0, \quad 4u - 1v + 1 = 0$$

und das Punktpaar

$$\begin{cases} 2\frac{6}{7}u - \frac{5}{7}v + 1 = 0, \\ 5\frac{1}{3}u - 5\frac{2}{3}v + 1 = 0 \end{cases}$$

gegeben. Welches ist die Gleichung des Kegelschnittes, auf dem die beiden involutorischen Punktreihen liegen?

201. Auf einem Kegelschnitte liegen zwei involutorische Punktreihen zweiter Ordnung. Je zwei entsprechende Punkte mögen durch eine Gerade verbunden werden. Welches ist die Gleichung der Enveloppe dieser Geraden?

Beispiel. $3u + 5v + 1 + (1u + 1v + 1)f + (2u - 1v + 1)f^2 = 0,$

$$3u + 5v + 1 + (1u + 1v + 1)k + (2u - 1v + 1)k^2 = 0,$$
$$fk - 2(f + k) + 3 = 0.$$

202. Gegeben ist ein Kegelschnitt und ein Punkt C in derselben Ebene. Es sollen auf dem Kegelschnitte zwei involutorische Punktreihen zweiter Ordnung bestimmt werden, sodaß der Punkt C das Involutionszentrum wird. Wie findet man die Doppelpunkte?

203. Auf einem Kegelschnitte liegen zwei involutorische Punktreihen. Es mögen zwei entsprechende Punkte A_1, A_2 mit zwei anderen einander zugeordneten Punkten B_1, B_2 verbunden werden. Wie liegt der Schnittpunkt der Geraden A_1B_1 und A_2B_2, ferner der der Geraden A_1B_2 und A_2B_1?

204. Auf einem Kegelschnitte sind vier Punkte gegeben. Auf wievielerlei Art können diese so gruppiert werden, daß durch sie in jedem einzelnen Falle zwei involutorische Punktreihen zweiter Ordnung bestimmt werden?

205. Zwei Strahlenbüschel zweiter Ordnung sind in Involution. Es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, in dem sich je zwei entsprechende Strahlen schneiden.

Beispiel. $x-y+1+(3x+2y+5)f+(2x-5y+3)f^2=0,$
$$x-y+1+(3x+2y+5)k+(2x-5y+3)k^2=0,$$
$$fk-3(f+k)+2=0.$$

206. Gegeben ein Kegelschnitt k und eine gerade Linie l. Es sollen zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung konstruiert werden, welche von dem Kegelschnitt k eingehüllt werden und die Gerade l zur Involutionsachse haben.

207. Um den Kegelschnitt
$$19x^2-126xy+31y^2+166x+90y-349=0$$
mögen zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelegt sein, deren Involutionsachse die Gerade $7x-15y-18=0$ sei. Welches sind die Gleichungen der Doppelstrahlen?

208. Um einen Kegelschnitt seien zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelegt. Es sollen die entsprechenden Strahlen, welche sich rechtwinklig durchschneiden, durch Konstruktion bestimmt werden, wenn der gegebene Kegelschnitt α) eine Ellipse, β) eine Hyperbel, γ) eine Parabel ist.

209. Von zwei involutorischen Strahlenbüscheln, welche von einem Kegelschnitte eingehüllt werden, sind zwei Strahlenpaare a_1, a_2 und b_1, b_2 gegeben. Wie liegen die Schnittpunkte der Strahlenpaare a_1, b_1 und a_2, b_2, ferner der Strahlenpaare a_1, b_2 und a_2, b_1?

210. Gegeben sind zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Es mögen die Berührungspunkte entsprechender Strahlen durch gerade Linien verbunden werden. Wie liegen diese Verbindungslinien zueinander?

211. Gegeben sind von zwei involutorischen Strahlenbüscheln resp. Punktreihen zweiter Ordnung die Doppelstrahlen resp. Doppelpunkte, sowie ein weiteres Strahlenpaar resp. Punktpaar. In

welcher Beziehung stehen die Doppelstrahlen zu dem Strahlenpaar, ferner die Doppelpunkte zu dem Punktpaar?

Die Sechsecke von Pascal und Brianchon.

212. Von einer Punktreihe zweiter Ordnung sind sechs Punkte gegeben, und zwar sind je zwei aufeinander folgende durch eine gerade Linie verbunden, sodaß die geradlinige Figur ein einem Kegelschnitte eingeschriebenes Sechseck ist. Wie liegen die Schnittpunkte der ersten und vierten, der zweiten und fünften, der dritten und sechsten Seite?

213. Auf einem Kegelschnitte sind sechs Punkte gegeben. Wie viele Pascalsche Linien lassen sich zu denselben konstruieren?

214. In einer Ebene sind sechs Punkte gegeben. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn dieselben einer Punktreihe zweiter Ordnung angehören sollen?

215. Um einen Kegelschnitt sind zwei involutorische Strahlenbüschel gelegt. Es ist zu zeigen, daß sich um das Sechseck, welches von drei Tangentenpaaren der Involution gebildet wird, ein Kegelschnitt legen läßt.

216. Von einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung seien sechs Strahlen gegeben. Man verbinde in dem Sechseck, welches von denselben gebildet wird, den ersten Eckpunkt mit dem vierten, den zweiten mit dem fünften, den dritten mit dem sechsten. Wie liegen die drei Diagonalen zu einander?

217. Um einen Kegelschnitt sind sechs Tangenten gelegt. Wie viele Brianchonsche Punkte lassen sich konstruieren?

218. Gegeben sind sechs gerade Linien. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn dieselben einem Strahlenbüschel zweiter Ordnung angehören sollen?

219. Auf einem Kegelschnitte sind drei Punktpaare gegeben, welche sich in Involution befinden. Es ist zu zeigen, daß diese Punkte Ecken eines Sechsecks sind, in welches sich ein Kegelschnitt beschreiben läßt.

220. In einen Kegelschnitt ist ein Viereck beschrieben. Wie liegen die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten und die Schnittpunkte je zweier Tangenten, welche in zwei Gegenecken an den Kegelschnitt gelegt sind?

221. Auf einem Kegelschnitte sind vier Punkte und die Gerade gegeben, welche die Kurve in einem dieser Punkte berührt. Es sollen die Tangenten konstruiert werden, welche den Kegelschnitt in den drei übrigen Punkten berühren.

222. Gegeben sind vier Gerade, welche einen Kegelschnitt berühren sollen, und der Berührungspunkt der einen derselben. Wie lassen sich die Berührungspunkte der drei übrigen finden?

223. Der Kegelschnitt k wird von der Geraden t_1 in P_1, von der Geraden t_2 in P_2 berührt. Es soll an die Kurve im Punkte P_3 derselben eine Tangente gelegt werden.

224. Gegeben ist eine Punktreihe zweiter Ordnung und eine Gerade g, welche durch den Punkt P_1 der Punktreihe geht. Es soll durch Konstruktion der zweite Punkt der Punktreihe gefunden werden, welcher auf der Geraden g liegt.

225. Zu einem gegebenen Strahlenbüschel zweiter Ordnung gehört der Strahl t_1, auf welchem der Punkt P_1 liegt. Es soll der zweite Strahl des Büschels gefunden werden, welcher durch den Punkt P_1 geht.

Siehe die Aufgaben Heft II, Nr. 660—668.

Pol und Polare.

226. Der Gleichung $B_0 + B_1 f + B_2 f^2 = 0$ entspricht ein Strahlenbüschel oder eine Punktreihe zweiter Ordnung, jenachdem $B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ Gleichungen von Geraden oder von Punkten sind. Welche Bedeutung haben in dem einen und dem andern Falle die Gebilde, welche den Gleichungen $B_0 = 0$, $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ entsprechen, bezüglich der Enveloppe der Strahlen resp. des Trägers der Punktreihe?

227. Gegeben sind zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, welche den Gleichungen

$$L_0 + f L_1 = 0, \quad L_2 + f L_0 = 0$$

entsprechen. Welche Lage haben die Fundamentalstrahlen der Büschel zu dem Erzeugnis?

228. Gegeben sei ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welches der Gleichung $L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$ entspricht. Welches ist die Gleichung einer Sekante der Enveloppe, wenn dieselbe durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $L_0 = 0$, $L_2 = 0$ gehen soll? Es

mögen die Schnittpunkte der Sekante und der Enveloppe mit dem Berührungspunkte von $L_2 = 0$ verbunden werden. Welchen Wert hat das Doppelverhältnis dieser Verbindungslinien und der Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$?

229. Gegeben sind die Punkte P, P_1, P_2, P_3 und die Gerade p. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 geht, sodaß p Polare des Punktes P bezüglich desselben wird.

230. Gegeben sind die Punkte P_1, P_2, P_3 und die beiden Geraden p_1 und p_2. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, der durch P_3 geht, sodaß p_1 die Polare des Punktes P_1, p_2 die Polare des Punktes P_2 bezüglich desselben wird.

231. In dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$$

seien die Berührungspunkte der Tangenten f_1 und f_2, ferner die der Tangenten f_3 und f_4 verbunden und diese beiden Sekanten bis zum Schnitt in P verlängert. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes P bezüglich der Enveloppe des Strahlenbüschels?

232. In dem Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$$

seien die Berührungspunkte der beiden Tangenten, deren Parameter f_1 und f_2 sind, durch eine Gerade verbunden. Wie läßt sich der Pol dieser Geraden bestimmen, wenn dieselbe als Polare bezüglich der Enveloppe des Büschels betrachtet wird?

233. Einem Kegelschnitt sind zwei involutorische Strahlenbüschel umschrieben, die Berührungspunkte der Tangenten bilden in diesem Falle zwei involutorische Punktreihen zweiter Ordnung. In welcher Beziehung steht das Involutionszentrum der Punktreihen zu der Involutionsachse der Strahlenbüschel?

234. In einen Kegelschnitt ist ein Sechseck beschrieben und durch die Eckpunkte desselben sind Tangenten an die Kurve gelegt, welche ein Brianchonsches Sechsseit bilden. In welcher Beziehung steht der Brianchonsche Punkt zu der Pascalschen Linie des eingeschriebenen Sechsecks?

235. In einen gegebenen Kegelschnitt ist ein vollständiges Viereck beschrieben. In welcher Beziehung steht jeder Diagonalpunkt zu der Verbindungslinie der beiden andern? Wie liegen

die Diagonalpunkte zu dem Kegelschnitte? Wie viele Vierecke können dem Kegelschnitt einbeschrieben werden, wenn die drei Diagonalpunkte gegeben sind?

236. Einem Kegelschnitt ist ein Tangentenvierseit umschrieben. In welcher Beziehung steht jede Diagonale desselben zu dem Schnittpunkte der beiden andern? Wie liegen die drei Diagonalen zu dem Kegelschnitte?

237. Um einen Kegelschnitt ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelegt. Es soll zu einem gegebenen Punkte P der konjugierte Pol Q bestimmt werden, welcher auf einer durch P gehenden Sekante liegt. Die konjugierten Punkte auf der durch P und Q gehenden Sekante sind in Involution. Es sollen die Doppelpunkte bestimmt werden.

238. Die Punkte der Punktreihe zweiter Ordnung

$$3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 1) f + (5u - 2v + 1) f^2 = 0$$

mögen als Pole bezüglich der Ellipse

$$x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$$

betrachtet werden. Es soll die Gleichung der Kurve bestimmt werden, welche die Polaren einhüllt.

239. Die Strahlen des Büschels zweiter Ordnung

$$x - y - 1 + (3x + y + 2) f + (x - 3y - 2) f^2 = 0$$

mögen als Polaren bezüglich des Kegelschnittes

$$4x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$$

betrachtet werden. Welches ist die Gleichung derjenigen Kurve, auf welcher die zugehörigen Pole liegen?

240. Gegeben sind eine Punktreihe erster Ordnung

$$1u + 3v + 1 + f(3u + 1v + 1) = 0,$$

eine Gerade $x = 0$ und ein Kegelschnitt $x^2 - 2xy + 6y^2 - 2 = 0$.

Verbindet man jeden Punkt der Punktreihe mit dem konjugierten Pole auf der Geraden $x = 0$ bezüglich des Kegelschnittes, so bilden die Verbindungslinien ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Welches ist die Enveloppe dieses Strahlenbüschels?

241. Gegeben sind ein Strahlenbüschel erster Ordnung

$$x + y - 1 + f(3x + y - 2) = 0,$$

der Punkt (P) $3u + 1 = 0$ und der Kegelschnitt

$$x^2 + 6xy + y^2 + 4 = 0.$$

Jeder Strahl des Büschels möge als Polare bezüglich des Kegelschnittes betrachtet und durch P zu demselben der konjugierte Strahl gezogen werden. Die konjugierten Strahlen bilden ein Büschel erster Ordnung, welches dem gegebenen projektivisch ist. Es soll das Erzeugnis der beiden projektivischen Strahlenbüschel bestimmt werden.

242. Gegeben sind ein Strahlenbüschel erster Ordnung

$$y - 3 - fx = 0,$$

die Gerade $x - 5 = 0$ und ein Kegelschnitt

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x + 3 = 0.$$

Auf jedem Strahl des Büschels ist zu dem Schnittpunkt mit der gegebenen Geraden der konjugierte Pol zu bestimmen. Welches ist die Gleichung der Kurve, auf welcher die den Schnittpunkten konjugierten Pole liegen?

243. Gegeben sind ein Strahlenbüschel erster Ordnung

$$y - f(x + 3) = 0,$$

eine Gerade $(g)\ y - 10 = 0$ und ein Kegelschnitt

$$9x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5 = 0.$$

Jeder Strahl des Büschels möge als Polare bezüglich des Kegelschnitts betrachtet werden und durch seinen Schnittpunkt mit der Geraden g möge die konjugierte Polare gezogen werden. Welcher Gleichung entspricht das System der konjugierten Polaren?

244. In ein gegebenes Dreieck ist ein Kegelschnitt zu beschreiben, sodaß eine Gerade p Polare eines Punktes P bezüglich der Kurve wird.

245. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, welcher die beiden Geraden t_1 und t_2 berührt und durch den Punkt P_1 geht, sodaß die Gerade p Polare des Punktes P wird.

246. Gegeben sind die Geraden t, p_1, p_2 und die Punkte P_1 und P_2. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, der von t berührt wird, bezüglich dessen p_1 die Polare des Punktes P_1 und p_2 die Polare des Punktes P_2 wird.

247. Durch die beiden Punkte P_1 und P_2 ist ein Kegelschnitt zu legen, für welchen ein gegebenes Dreieck ABC ein Polardreieck ist.

248. Zur Konstruktion eines Kegelschnitts sind die beiden Tangenten t_1, t_2 und ein Polardreieck ABC gegeben.

249. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, wenn das Polardreieck ABC, der Pol P und die zugehörige Polare p gegeben sind.

250. Durch die vier Punkte A, B, C, D ist ein Kegelschnitt zu legen, für welchen die beiden Punkte P_1 und P_2 konjugierte Pole werden.

251. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte gegeben. Es soll, ohne daß die Kurve gezeichnet wird, die Polare eines Punktes P bezüglich derselben konstruiert werden.

252. Gegeben sind fünf Tangenten eines Kegelschnittes. Eine Gerade p möge als Polare betrachtet werden. Wie findet man, ohne daß die Kurve gezeichnet wird, den zugehörigen Pol?

Mittelpunkt, Durchmesser, Achsen, Asymptoten.

253. Um eine Kurve zweiter Klasse seien zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung gelegt. Wie muß die Parametergleichung lauten, wenn jeder Strahl des einen Büschels dem entsprechenden Strahl des andern Büschels parallel laufen soll?

Beispiel. $3x + y - 1 + (2x - y + 3)f + (5x + 2y + 3)f^2 = 0.$

254. Welches ist die Gleichung der Involutionsachse, wenn zwei involutorische Strahlenbüschel zweiter Ordnung der in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen Bedingung genügen?

255. Es soll die Gleichung eines beliebigen Durchmessers derjenigen Kurve bestimmt werden, welche das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f + (L_2x + M_2y + N_2)f^2 = 0$$

einhüllt.

256. Gegeben ist ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f + (L_2x + M_2y + N_2)f^2 = 0.$$

Es soll der Mittelpunkt der Kurve bestimmt werden, welche das Büschel einhüllt.

Beispiel. $x + y + 1 + (2x + 3y + 1)f + (5x - 2y + 3)f^2 = 0.$

257. Der Gleichung

$$(x - y - 1) + (3x + y + 2)f + (x - 3y - 2)f^2 = 0$$

entspricht ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Es sollen die Gleichungen von zwei konjugierten Durchmessern der Kurve aufgestellt werden, welche das Strahlenbüschel einhüllt.

258. Das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$2x - y + 1 + (x + y + 1)\,t + (3x + 5y + 1)\,t^2 = 0$$

wird von einer Kurve zweiter Ordnung eingehüllt. Es sollen die Asymptoten dieser Kurve bestimmt werden.

259. Es sollen die Gleichungen der Achsen desjenigen Kegelschnittes bestimmt werden, welcher das Strahlenbüschel zweiter Ordnung

$$x - y + 1 + (x + y + 1)\,t + (2x + y - 1)\,t^2 = 0$$

einhüllt.

260. Gegeben sind fünf Punkte einer Punktreihe zweiter Ordnung. Es soll der Mittelpunkt des Kegelschnittes, welcher der Träger dieser Punktreihe ist, durch Konstruktion gefunden werden.

261. Über einer konstanten Grundlinie c seien Dreiecke konstruiert, in denen die Differenz der Winkel an der Grundlinie konstant und gleich δ sei. Die Spitzen dieser Dreiecke bilden eine Punktreihe zweiter Ordnung. Es sollen die Asymptoten und die Achsen des Trägers dieser Punktreihe durch Konstruktion gefunden werden.

262. Gleitet die konstante Seite c eines Dreiecks auf einer Geraden fort, während sich die beiden andern Seiten um zwei feste Punkte drehen, so bilden die der konstanten Seite gegenüberliegenden Spitzen eine Punktreihe zweiter Ordnung. Es sollen zwei konjugierte Durchmesser des Trägers bestimmt werden, welche einen Winkel α miteinander einschließen.

263. Von einem Büschel zweiter Ordnung sind fünf Strahlen gegeben. Es sollen der Mittelpunkt und die Asymptoten der Enveloppe durch Konstruktion bestimmt werden.

264. Von einer Kurve zweiter Ordnung sind die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser und die Lage von zwei Punkten der Kurve bekannt. Die Kurve ist zu konstruieren.

265. Zur Konstruktion einer Kurve zweiter Ordnung sind gegeben: die Lage zweier Tangenten und die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser.

266. Es soll eine Kurve zweiter Ordnung konstruiert werden, wenn ein Punkt P derselben, ein Durchmesser $P_1 P_2$ der Größe und Lage nach und die Richtung des konjugierten Durchmessers d_1 gegeben ist.

267. Von einer Kurve zweiter Ordnung sind zwei konjugierte Durchmesser der Lage und Größe nach gegeben. Asymptoten und Achsen der Kurve sollen durch Konstruktion gefunden werden.

268. Von einer Kurve zweiter Ordnung sind drei Punkte P_1, P_2, P_3 und der Mittelpunkt M gegeben. Es soll die Polare eines Punktes P bezüglich der Kurve durch Konstruktion bestimmt werden.

269. Gegeben sind von einer Kurve zweiter Ordnung der Mittelpunkt M und drei Tangenten t_1, t_2, t_3. Eine Gerade g möge als Polare bezüglich der Kurve betrachtet werden. Wie läßt sich der zugehörige Pol durch Konstruktion finden?

Brennpunkte.

270. Gegeben ist eine Punktreihe zweiter Ordnung

$$a_0 u + b_0 v + c_0 + (a_1 u + b_1 v + c_1) f + (a_2 u + b_2 v + c_2) f^2 = 0.$$

Es soll die Anzahl derjenigen Punkte bestimmt werden, welche als Mittelpunkte solcher involutorischen Strahlenbüschel angesehen werden können, in denen je zwei entsprechende Strahlen aufeinander lotrecht stehen und in Beziehung auf den Träger konjugiert sind.

271. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn der Träger der Punktreihe zweiter Ordnung eine Parabel ist?

Beispiel. $3u + 1v + 1 + (2u + 1v + 2) f + (5u - 2v + 1) f^2 = 0.$

272. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn der Strahl

$$x - x_1 + i(y - y_1) = 0$$

dem Büschel

$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) f + (L_2 x + M_2 y + N_2) f^2 = 0$$

angehören soll? Wie lassen sich mit Hilfe dieser Bedingungsgleichung die Koordinaten der Brennpunkte für die Enveloppe des Büschels berechnen?

273. Gegeben sei die Ellipse $20y^2 + 5x^2 = 100$ und die Gerade $Lx + My + N = 0$. Jeder Punkt der Geraden möge als Pol bezüglich der Ellipse betrachtet und von ihm aus ein Lot auf die zugehörige Polare gefällt werden. In welcher Beziehung stehen die Punkte, in welchen die Polaren und die zugehörigen Lote die Achsen schneiden?

274. Es ist zu zeigen, daß eine Tangente und die zugehörige Normale eines Kegelschnittes mit den nach dem Berührungspunkte gezogenen Brennstrahlen ein harmonisches Büschel bilden.

275. An einen Kegelschnitt ist im Punkte P eine Tangente gelegt und dieselbe verlängert bis zum Schnitt mit der einen Direktrix in M. Unter welchem Winkel schneiden sich PF und MF, wenn F der der Direktrix zugehörige Brennpunkt ist?

276. Um den Brennpunkt eines Kegelschnittes sei ein Kreis beschrieben und jeder Punkt des Kegelschnittes werde als Pol bezüglich des Kreises betrachtet. Es soll die Enveloppe der Polaren bestimmt werden.

277. Erteilt man der Größe ε alle möglichen reellen Werte, so entspricht der Gleichung

$$y^2 + (1 - \varepsilon^2)\, x^2 - 2kx + k^2 = 0$$

ein System von Kegelschnitten, welche die eine Direktrix und den zugehörigen Brennpunkt gemein haben. Die Gerade $Lx + My + N = 0$ möge in Bezug auf jede dieser Kurven als Polare betrachtet werden. Auf welcher Linie liegen die zugehörigen Pole?

278. Es soll die Anzahl der Kegelschnitte bestimmt werden, welche den Punkt $au + bv + 1 = 0$ zum Brennpunkte haben und einem Dreieck umschrieben sind, dessen Ecken den Gleichungen

$$a_0 u + b_0 v + 1 = 0, \quad a_2 u + b_2 v + 1 = 0, \quad a_3 u + b_3 v + 1 = 0$$

entsprechen.

279. Gegeben sind die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks

$$y - x - 2 = 0, \quad 4x + 3y + 12 = 0, \quad 9x + 8y - 72 = 0.$$

Es soll dem Dreieck ein Kegelschnitt einbeschrieben werden, welcher den Koordinatenanfangspunkt zum Brennpunkt hat.

280. Gegeben sind zwei Punkte $P_1\,(x_1, y_1)$ und $P_2\,(x_2, y_2)$. Es soll die Gleichung derjenigen Kegelschnitte aufgestellt werden, welche diese Punkte zu Brennpunkten haben, oder: Es soll die Gleichung eines Systems konfokaler Kegelschnitte aufgestellt werden.

281. Von einem Punkte $P\,(x_1, y_1)$ sind Tangenten an alle Kegelschnitte gelegt, welche ein konfokales System bilden. Es möge der Winkel, welcher von den beiden an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten gebildet wird, halbiert werden. Wie liegen die Halbierungslinien der Winkel zu einander?

282. Gegeben ist ein System konfokaler Kegelschnitte, welches der Gleichung

$$(2 + k)\, u^2 + 6uv + (5 + k)\, v^2 + 4u + 2v + 3 = 0$$

entspricht. Wieviele Kurven des Systems gehen durch den Punkt $x_1 = 3$, $y_1 = 5$? Welches sind die Gleichungen derselben?

283. Eine gegebene Gerade, deren Gleichung $L_1 x + M_1 y + N_1 = 0$ ist, möge als Polare bezüglich der Kurven eines Systems konfokaler Kegelschnitte betrachtet werden. Welches ist der geometrische Ort des Poles?

284. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes sind die beiden Brennpunkte und die zu dem einen derselben gehörige Direktrix gegeben.

285. Von einem Kegelschnitte sind gegeben ein Punkt P, der eine Brennpunkt F und die zu demselben gehörende Direktrix d. Wie läßt sich die Kurve konstruieren?

286. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, wenn der eine Brennpunkt F, die zugehörende Direktrix d und eine Tangente t gegeben ist.

287. Zur Konstruktion eines Kegelschnittes ist ein Brennpunkt F, zwei Tangenten t_1 und t_2 und der Berührungspunkt der ersten P_1 gegeben.

288. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, welcher durch drei Punkte P_1, P_2, P_3 geht und die gerade Linie d zur Direktrix hat.

289. Es soll ein Kegelschnitt konstruiert werden, welcher die Gerade t zur Tangente und die beiden Geraden d_1 und d_2 zu Direktrixen hat, wenn die Lage der Hauptachse bekannt ist.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen.

290. Gegeben sind zwei projektivische Strahlenbüschel

$$L_1 + f L_2 = 0, \quad L'_1 + f L'_2 = 0.$$

Es soll die Gleichung eines Kegelschnittbüschels bestimmt werden, dessen Grundpunkte die Mittelpunkte der Büschel und die Schnittpunkte von je zwei Fundamentalstrahlen sind.

291. Welches geometrische Gebilde entspricht der Gleichung

$$(a_1 u + b_1 v + 1)(a'_2 u + b'_2 v + 1) - f(a'_1 u + b'_1 v + 1)(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$

wenn der Größe f alle möglichen reellen Werte erteilt werden?

292. Gegeben ist das Kegelschnittbüschel

$$(L_1x+M_1y+N_1)(L'_2x+M'_2y+N'_2)-f(L'_1x+M'_1y+N'_1)(L_2x+M_2y+N_2)=0$$

und eine Gerade, deren Koordinaten u_1, v_1 sind. Es soll die Gleichung des Punktpaares aufgestellt werden, in dem die Gerade einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels schneidet.

293. Welche Kegelschnitte des Büschels

$$(x-y-1)(x-2y+3)-f(2x-y+1)(2x+y-3)=0$$

werden von der Geraden $2y-2x+1=0$ berührt?

294. Der Gleichung

$$(a_1u+b_1v+1)(a'_2u+b'_2v+1)-f(a'_1u+b'_1v+1)(a_2u+b_2v+1)=0$$

entspricht eine Kegelschnittschar. Von dem Punkte $ux_1+vy_1+1=0$ seien an alle Kurven der Schar Tangenten gelegt. Welches ist die Gleichung eines Tangentenpaares, das sich von dem gegebenen Punkte aus an einen beliebigen Kegelschnitt der Schar ziehen läßt.

295. Es sollen diejenigen Kegelschnitte der Schar

$$(1u+5v+1)(-1u-3v+1)-f(-2u+1v+1)(4u-1v+1)=0$$

bestimmt werden, welche durch den Punkt $2u+1=0$ gehen.

296. Gegeben sind die beiden Geraden

$$(G_1)\ 2y-x-8=0, \quad (G_2)\ y-2x+6=0.$$

Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes bestimmt werden, der die Gerade G_1 in dem Punkte $x_1=4$, $y_1=6$, die Gerade G_2 in dem Punkte $x_2=3$, $y_2=0$ berührt und

a) die Gerade $x=-1$ zur Tangente hat,

b) durch den Koordinatenanfangspunkt geht.

297. Gegeben ist ein Kegelschnittbüschel, welches der Gleichung

$$(x-y-1)(x-2y+3)-f(x+y+1)(2x+y-3)=0$$

entspricht. Es sollen die Gleichungen der Seiten und Ecken des Kardinaldreiecks bestimmt werden.

298. Der Gleichung

$$(3u+4v+1)(1u+\tfrac{3}{8}v+1)-f(4u+1)(7u+8v+1)=0$$

entspricht eine Kegelschnittschar. Welches sind die Gleichungen der Geraden, die das Kardinaldreiseit derselben bilden?

299. Gegeben ist die Gleichung

$$(2y-x-8)(y-2x+6)-f(y-6x+18)^2=0.$$

Derselben entspricht eine Schar von Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung haben. Wie liegt das Kardinaldreiseit der Schar?

300. Der Gleichung

$$(x + 2y - 5)(x + 2y + 2) - f(3x + 5y + 1)(2x + 3y - 1) = 0$$

entspricht ein Kegelschnittbüschel. Es soll zu dem Punkte $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ der konjugierte Pol bezüglich des Büschels bestimmt werden.

301. Gegeben ist die Kegelschnittschar

$$(1u + 5v + 1)(6u + 4v + 1) - f(3u - 2v + 1)(5u + 1v + 1) = 0$$

und die Gerade $3x + 4y + 2 = 0$. Es soll zu dieser Geraden die konjugierte Gerade bezüglich der Schar bestimmt werden.

302. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte der Kegelschnitte, welche der Schar

$$(a_1u + b_1v + 1)(a'_2u + b'_2v + 1) - f(a'_1u + b'_1v + 1)(a_2u + b_2v + 1) = 0$$

angehören?

303. Gegeben ist das Kegelschnittbüschel

$$(x - y - 1)(x - 2y + 3) - f(x + y + 1)(2x + y - 3) = 0$$

und die Gerade $y = 2x$. Auf welcher Kurve liegen diejenigen Punkte, welche den Punkten der Geraden bezüglich des Büschels konjugiert sind? Welche Lage hat dieser geometrische Ort zu dem Kardinaldreieck des Büschels?

304. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die gegebene Gerade der Gleichung

$$y - y_1 = \operatorname{tang} \varphi \, (x - x_1)$$

entspricht und durch einen der Eckpunkte des Kardinaldreiecks geht?

305. Gegeben ist die Kegelschnittschar

$$(1u + 5v + 1)(6u + 4v + 1) - f(3u - 2v + 1)(5u + 1v + 1) = 0$$

und das Strahlenbüschel erster Ordnung $y - x \operatorname{tang} \varphi = 0$.

Jeder Strahl des Strahlenbüschels möge als Polare bezüglich der Kurven der Schar betrachtet werden, welches ist die Enveloppe der konjugierten Strahlen?

306. Der Gleichung

$$(x + 2y - 5)(2x + y + 2) - f(3x + 5y + 1)(2x + 3y - 1) = 0$$

entspricht ein Kegelschnittbüschel. Die Polaren der Punkte

$$5u + 2v + 1 = 0, \quad 3v + 1 = 0$$

bezüglich der Kurven des Büschels bilden zwei projektivische Strahlenbüschel. Welches ist das Erzeugnis derselben?

307. Die Punkte der beiden Geraden

$$x + y + 1 = 0, \quad -x + 2y + 2 = 0$$

mögen als Pole bezüglich der Kegelschnittschar

$$(3u + 4v + 1)(1u + 2v + 1) - f(2u - 1v + 1)(-1u + 1v + 1) = 0$$

betrachtet werden, dann sind die den gegebenen Geraden konjugierten Strahlen Träger zweier projektivischen Punktreihen. Welches ist das Erzeugnis dieser beiden projektivischen Punktreihen?

308. Zieht man durch den Grundpunkt $x_1 = 0$, $y_1 = -1$ des Kegelschnittbüschels

$$(x - y - 1)(x - 2y + 3) - f(x + y + 1)(2x + y - 3) = 0$$

die beiden Strahlen

$$y - 3x + 1 = 0, \quad 2y - x + 2 = 0,$$

so werden dieselben von den Kegelschnitten des Büschels in zwei projektivischen Punktreihen geschnitten. Von welcher Kurve werden die Verbindungslinien je zweier entsprechenden Punkte eingehüllt?

309. Von den Punkten

$$3u - 5v + 1 = 0, \quad 4u - 2v + 1 = 0,$$

welche auf einer Grundlinie der Kegelschnittschar

$$(1u + 5v + 1)(6u + 4v + 1) - f(3u - 2v + 1)(5u + 1v + 1) = 0$$

liegen, seien an alle Kurven der Schar Tangenten gelegt. Dieselben bilden zwei projektivische Strahlenbüschel in schiefer Lage. Welches ist das Erzeugnis dieser Büschel?

310. Jeder Kegelschnitt des Büschels

$$(L_1x+M_1y+N_1)(L'_2x+M'_2y+N'_2)-f(L'_1x+M'_1y+N'_1)(L_2x+M_2y+N_2)=0$$

wird von dem Kegelschnitt

$$(L_1x + M_1y + N_1)(L'_2x + M'_2y + N'_2) - (L_2x + M_2y + N_2)^2 = 0,$$

der durch zwei Grundpunkte des Büschels geht, in zwei weiteren Punkten geschnitten. Wie liegen die Strahlen, von denen jeder die letzteren beiden Schnittpunkte eines Kegelschnittes verbindet?

311. Gegeben sei eine Kegelschnittschar und außerdem ein Kegelschnitt k, welcher nur zwei Grundlinien der Schar zu Tangenten hat. Der Kegelschnitt k wird mit jeder Kurve der Schar zwei weitere Tangenten gemein haben. Welches ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes jedes dieser Tangentenpaare?

312. In einem Kegelschnittbüschel seien zu einer gegebenen Geraden g die konjugierten Durchmesser konstruiert. Welche gegenseitige Lage haben diese Durchmesser zu einander?

Vermischte Aufgaben.

313. Die Punkte der Geraden $y = Mx$ mögen als Pole bezüglich des Kegelschnittes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

betrachtet werden. Durch jeden Pol sei eine Parallele zu der zugehörigen Polaren gezogen. Welcher Ordnung gehört das Strahlenbüschel an, welches diese Parallelen bildet? Welches ist die Enveloppe dieses Strahlenbüschels?

314. Durch die beiden Kegelschnitte

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + 2D'x + 2E'y + F' = 0$$

ist eine gerade Linie gelegt, deren Koordinaten u_1, v_1 sind. Welchen Wert hat das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte?

315. Gegeben sind zwei Kegelschnitte

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$
$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Die Geraden, von denen jede durch diese beiden Kurven in vier harmonischen Punkten geschnitten wird, bilden ein Strahlenbüschel. Welcher Ordnung gehört dasselbe an? Welches ist die Gleichung der Enveloppe desselben?

316. Von dem Punkte $P\ (x_1, y_1)$ seien Tangenten an die beiden Kegelschnitte

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$
$$A'u^2 + 2B'uv + C'v^2 + 2D'u + 2E'v + F' = 0$$

gelegt. Welchen Wert hat das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen?

317. Zwei Kegelschnitte entsprechen den Gleichungen

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$
$$A_1u^2 + 2B_1uv + C_1v^2 + 2D_1u + 2E_1v + F_1 = 0.$$

Es soll der geometrische Ort eines Punktes gesucht werden, von dem die Tangenten an beide Kurven gelegt ein harmonisches Strahlenbüschel bilden.

318. Von einer Kegelschnittschar sind die vier Grundlinien gegeben. Wie läßt sich eine Parabel konstruieren, welche der Schar angehört?

319. Von einer Hyperbel sind vier Tangenten und eine Asymptote gegeben. Man soll die Lage der zweiten Asymptote und die einer beliebigen fünften Tangente durch Konstruktion finden.

320. Durch die Punkte A, B, C und D ist eine Hyperbel zu legen, welche die Gerade g zur Asymptote hat.

321. Dem Dreieck ABC soll eine Parabel einbeschrieben werden, welche von der Seite BC im Punkte D berührt wird.

322. Um das Dreieck ABC soll eine Hyperbel gelegt werden, deren Asymptoten zwei gegebenen Geraden g_1 und g_2 parallel laufen

323. Von einer Ellipse ist ein Punkt P, sowie ein Durchmesser d der Länge und Lage nach und die Richtung des konjugierten Durchmessers d_1 gegeben. Wie lassen sich die Achsen finden?

324. Es sollen beliebig viele Tangenten einer Hyperbel gezogen werden, welche durch den Punkt P geht und die beiden Geraden g_1 und g_2 zu Asymptoten hat.

325. Gegeben sind der Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

und die Gerade $Lx + My + N = 0$. Von einem beliebigen Punkte P der Geraden sind an den Kegelschnitt die beiden Tangenten und in Bezug auf diese der zu der gegebenen Geraden konjugierte harmonische Strahl gezogen. Welche Kurve hüllt die vierten harmonischen Strahlen ein, wenn der Punkt P auf der gegebenen Geraden fortrückt?

326. Gegeben ist ein Dreieck ABC und zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel, welche in Involution sind. Es soll dem Dreieck ein Kegelschnitt einbeschrieben werden, bezüglich dessen je zwei entsprechende Strahlen einander konjugiert sind.

327. Durch die Ecken eines Dreiecks ABC ist ein Kegelschnitt zu legen, bezüglich dessen je zwei entsprechende Punkte von zwei konjektivischen Punktreihen, welche sich in Involution befinden, konjugiert sind.

328. Gegeben sind zwei konjektivische Punktreihen, welche sich in Involution befinden, und das Dreieck ABC. Es soll dem Dreieck ein Kegelschnitt einbeschrieben werden, bezüglich dessen

je zwei entsprechende Punkte der involutorischen Punktreihen konjugiert sind.

329. Gegeben sind zwei konzentrische Strahlenbüschel, welche sich in Involution befinden, und das Dreieck ABC. Es soll dem Dreieck ein Kegelschnitt umschrieben werden, bezüglich dessen je zwei entsprechende Strahlen einander konjugiert sind.

330. Die gerade Linie $y - 2x - 4 = 0$ geht durch einen Grundpunkt des Kegelschnittbüschels

$$(x - y - 1)(x - 2y + 3) - f(x + y + 1)(2x + y - 3) = 0.$$

An jeden Kegelschnitt sei im zweiten Schnittpunkte eine Tangente gelegt. Welches ist die Gleichung der Enveloppe dieser Tangenten?

331. Von dem Punkte $3u - 5v + 1 = 0$, welcher auf einer Grundlinie der Kegelschnittschar

$$(1u + 5v + 1)(6u + 4v + 1) - f(3u - 2v + 1)(5u + 1v + 1) = 0$$

liegt, seien die zweiten Tangenten an die einzelnen Kegelschnitte der Schar gezogen. Auf welcher Kurve liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten?

332. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche von drei gegebenen geraden Linien berührt werden?

333. Es soll der geometrische Ort des Brennpunktes einer Parabel bestimmt werden, welche von drei gegebenen geraden Linien berührt wird.

334. An einen Kegelschnitt seien zwei Tangenten gelegt und die zugehörige Berührungssehne gezogen, ferner seien von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes auf diese drei Geraden Lote gefällt. In welcher Beziehung stehen diese Lote zu einander?

335. Einem Kegelschnitt sei ein Sehnenviereck einbeschrieben, und von einem beliebigen Punkte der Kurve seien Lote auf die Seiten des Vierecks gefällt. Welcher Satz läßt sich für diese Lote aufstellen?

336. Auf eine Tangente eines Kegelschnittes seien von den Berührungspunkten zweier beliebigen andern Tangenten sowie von dem Schnittpunkte derselben Lote gefällt. In welcher Beziehung stehen diese Lote zu einander?

337. Gegeben sind vier Strahlen eines Strahlenbüschels

$$2y - x - 5 = 0, \quad 3y - 2x - 7 = 0,$$
$$2y - 3x - 3 = 0, \quad 2y + 5x - 11 = 0$$

und vier Punkte $P_1(5, 1)$, $P_2(3, 2)$, $P_3(0, -3)$, $P_4(-1, 0)$. Auf welcher Kurve liegt der Punkt P, wenn das Doppelverhältnis der vier Strahlen PP_1, PP_2, PP_3, PP_4 gleich dem der vier gegebenen Strahlen ist?

338. Die Parameter f und k des Kegelschnittbüschels $L_1 L'_2 + f L'_1 L_2 = 0$ und des Strahlenbüschels erster Ordnung $A_1 + k A_2 = 0$ mögen durch die Relation $afk + bf + ck + d = 0$ verbunden sein. Welches ist das Erzeugnis der beiden Büschel?

339. Gegeben sind ein Strahlenbüschel erster Ordnung

$$x - 2y + 5 + f(3x - 2y + 3) = 0$$

und ein Kegelschnittbüschel

$$(x - y - 1)(x - 2y + 3) + k(2x - y + 2)(2x + y - 3) = 0.$$

Die beiden Parameter f und k sollen der Gleichung $f + 2k = 0$ genügen. Welches ist die Gleichung des Erzeugnisses der beiden Büschel? Welcher Kegelschnitt des Büschels geht durch den Mittelpunkt des Büschels erster Ordnung? In welcher Beziehung steht der diesem Kegelschnitt entsprechende Strahl zu dem Erzeugnis?

340. Gegeben seien dieselben Büschel wie in der vorhergehenden Aufgabe. Welcher Strahl des Büschels erster Ordnung geht durch den Fundamentalpunkt $x_1 = -3$, $y_1 = -4$ des Kegelschnittbüschels? Welcher Kegelschnitt des Büschels entspricht diesem Strahle? In welcher Beziehung steht dieser Kegelschnitt zu dem Erzeugnis der beiden Büschel?

Trimetrische Koordinaten.

Die homogenen Gleichungen zweiten Grades.

341. Gegeben sind die Gleichungen von drei Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen:

$$x_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0,$$
$$x_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0,$$
$$x_3 \equiv x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - p_3 = 0.$$

Es soll die Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

in der Form

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

dargestellt werden. Wie lassen sich die Werte der konstanten Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}$ bestimmen?

342. Gegeben die Gleichung eines Kegelschnittes in Linienkoordinaten

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0$$

und die Gleichungen von drei Punkten

$$U_1 \equiv a_1u + b_1v + 1 = 0, \quad U_2 \equiv a_2u + b_2v + 1 = 0,$$
$$U_3 \equiv a_3u + b_3v + 1 = 0,$$

welche nicht in einer Geraden liegen. In welcher Beziehung stehen die Lote u_1, u_2, u_3 zu einander, welche von den drei Punkten auf eine beliebige Tangente des Kegelschnittes gefällt sind?

343. Welche Gestalt nimmt das in der Auflösung 341 gewonnene Resultat an, wenn der Kegelschnitt durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht?

344. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Welches ist die Gleichung des dem Dreieck umschriebenen Kreises in homogenen Punktkoordinaten? Wie liegen die Fußpunkte der Lote, welche von einem beliebigen Punkte des Kreises auf die Seiten des Dreiecks gefällt sind?

345. Gegeben sind die Gleichungen der Ecken des Fundamentaldreiecks $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes bestimmt werden, welcher dem Fundamentaldreieck einbeschrieben ist.

346. Die Gleichungen der Ecken des Fundamentaldreiecks sind $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$. Welches ist die Gleichung des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises?

347. Es sollen die Gleichungen der Strahlenpaare bestimmt werden, welche die Ecken des Fundamentaldreiecks mit denjenigen Punkten verbinden, in denen der Kegelschnitt

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

die gegenüberliegenden Seiten schneidet.

348. Von den Eckpunkten des Fundamentaldreiecks seien Tangenten an den Kegelschnitt

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 + 2k_{13}u_1u_3 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0$$

gezogen. Es sollen die Gleichungen der Punktpaare bestimmt werden, in denen je zwei von einem Eckpunkte ausgehende Tangenten die Gegenseite des Fundamentaldreiecks schneiden.

349. Um ein Dreieck, dessen Seiten den Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ entsprechen, sei ein Kegelschnitt gelegt. Welches sind die Gleichungen der Tangenten, die den Kegelschnitt in den Eckpunkten des Dreiecks berühren? Wie liegen die Punkte, in denen die Tangenten die Gegenseiten des Fundamentaldreiecks schneiden?

350. In ein Dreieck, dessen Eckpunkte den Gleichungen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ entsprechen, sei ein Kegelschnitt beschrieben. Es sollen die Gleichungen der Punkte bestimmt werden, in welchen die Seiten des Dreiecks den Kegelschnitt berühren. Ferner soll die Gleichung des Punktes bestimmt werden, in dem sich die nach den Berührungspunkten gezogenen Ecktransversalen des Dreiecks durchschneiden.

351. Gegeben sind fünf Punkte durch ihre Koordinaten. Es soll die Gleichung desjenigen Kegelschnittes bestimmt werden, welcher sich durch die fünf Punkte legen läßt.

352. Gegeben sind fünf gerade Linien. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittes bestimmt werden, der von diesen Geraden berührt wird.

353. Durch den Eckpunkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks sei ein Strahl $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$ gelegt. Es sollen die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes des Strahles und des dem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes

$$a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 = 0$$

bestimmt werden.

354. Von dem Punkte $pu_1 + qu_2 = 0$ sei an den dem Fundamentaldreieck einbeschriebenen Kegelschnitt

$$k_{12}u_1u_2 + k_{23}u_2u_3 + k_{31}u_3u_1 = 0$$

die zweite Tangente gelegt. Welches sind die Koordinaten derselben?

355. Gegeben ist die Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Wir bezeichnen die Diskriminante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

mit Δ, dagegen die Invariante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

mit δ. Welches Gebilde entspricht der Gleichung, wenn

1. $\delta < 0$ und a) $\Delta < 0$, b) $\Delta = 0$, c) $\Delta > 0$;
2. $\delta = 0$ und a) $\Delta < 0$, b) $\Delta = 0$, c) $\Delta > 0$;
3. $\delta > 0$ und a) $\Delta < 0$, b) $\Delta = 0$, c) $\Delta > 0$ ist?

356. Es sollen die Kurven bestimmt werden, welche den folgenden Gleichungen entsprechen:

a) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3 - 4x_3^2 = 0$,
b) $21x_1^2 + 26x_1x_2 + 8x_2^2 + 41x_1x_3 + 24x_2x_3 + 10x_3^2 = 0$,
c) $5x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_2^2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$,
d) $a_1^2x_1^2 + 2a_1a_2x_1x_2 + a_2^2x_2^2 + 2a_1a_3x_1x_3 + 2a_2a_3x_2x_3 + a_3^2x_3^2 = 0$,
e) $9x_1^2 - 12x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 + 3x_3^2 = 0$.

357. Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten der Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

genügen, wenn der Relation ein Kreis entsprechen soll?

358. Welches ist die Gleichung eines dem Fundamentaldreieck einbeschriebenen Kegelschnittes in Punktkoordinaten?

359. Es sollen die Gleichungen derjenigen Kreise, welche dem Fundamentaldreieck einbeschrieben und anbeschrieben werden können, in homogenen Punktkoordinaten aufgestellt werden.

360. Welchen Bedingungen müssen die Konstanten der Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

genügen, wenn derselben die unendlich ferne Gerade entsprechen soll?

361. Gegeben sei die Gleichung

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 + 2k_{13}u_1u_3 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0.$$

Unter welchen Bedingungen werden dieser Gleichung a) eine Ellipse, b) eine Hyperbel, c) eine Parabel, d) zwei Punkte entsprechen?

362. Es sollen die Kurven bestimmt werden, welche den folgenden Gleichungen entsprechen:

a) $5u_1^2 + 8u_1u_2 - 6u_2^2 + 3u_1u_3 - 12u_2u_3 + 2u_3^2 = 0$,

b) $21u_1^2 + 16u_1u_2 - 16u_2^2 + 10u_1u_3 + u_3^2 = 0$,

c) $3u_1^2 + 8u_1u_2 + 7u_2^2 + 4u_1u_3 - 10u_2u_3 + 6u_3^2 = 0$,

d) $8u_1^2 + 6u_1u_2 + 7u_2^2 - 2u_1u_3 - 4u_2u_3 + u_3^2 = 0$.

363. Welche Gestalt kann man der Gleichung eines Kegelschnittes in homogenen Linienkoordinaten erteilen, wenn die Kurve durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks geht?

364. Um das Fundamentaldreieck sei ein Kreis beschrieben. Welches ist die Gleichung desselben in homogenen Linienkoordinaten? Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes?

365. Dem Fundamentaldreieck sei eine Parabel einbeschrieben. Welches ist die Gleichung derselben?

366. Es soll das Gebilde bestimmt werden, welches der Gleichung

$$\frac{u_1^2}{h_1^2} + \frac{u_2^2}{h_2^2} + \frac{u_3^2}{h_3^2} - \frac{2u_1u_2\cos\gamma}{h_1h_2} - \frac{2u_2u_3\cos\alpha}{h_2h_3} - \frac{2u_3u_1\cos\beta}{h_3h_1} = 0$$

entspricht, wenn h_1, h_2, h_3 die Höhen und α, β, γ die Winkel des Fundamentaldreiecks sind.

367. Gegeben sind die beiden Gleichungen

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

Welche Bedeutung haben die gemeinschaftlichen Wurzeln

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)_1, \left(\frac{x_2}{x_3}\right)_1; \left(\frac{x_1}{x_3}\right)_2, \left(\frac{x_2}{x_3}\right)_2$$

derselben, a) wenn x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten, b) wenn x_1, x_2, x_3 homogene Linienkoordinaten sind?

368. Welche Bedingung muß erfüllt sein, wenn der Kegelschnitt $a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 = 0$ von der geraden Linie $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ berührt werden soll?

369. Es soll die Bedingungsgleichung dafür aufgestellt werden, daß der Punkt $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$ auf dem Kegelschnitte $k_{12}u_1u_2 + k_{23}u_2u_3 + k_{31}u_3u_1 = 0$ liegt.

370. Gegeben ist die Gleichung eines Kegelschnittes

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Es soll die Gleichung der Geraden bestimmt werden, welche die Kurve im Punkte x_1, x_2, x_3 berührt.

371. Der Kegelschnitt

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 + 2k_{13}u_1u_3 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0$$

möge von einer Geraden, deren Koordinaten u'_1, u'_2, u'_3 sind, berührt werden. Welches ist die Gleichung des Berührungspunktes?

372. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittbüschels aufgestellt werden a) in homogenen Punktkoordinaten, b) in homogenen Linienkoordinaten.

373. Gegeben sei ein Vierseit. Es soll die Gleichung derjenigen Kegelschnittschar bestimmt werden, deren Kurven alle von den Seiten des Vierseits berührt werden a) in homogenen Punktkoordinaten, b) in homogenen Linienkoordinaten.

374. Es soll die Anzahl der Kegelschnitte bestimmt werden, welche durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks gehen und von den beiden Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ und $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ berührt werden.

375. Wie viele Kegelschnitte lassen sich dem Fundamentaldreieck einbeschreiben, welche zugleich durch die Punkte $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$ und $h_1u_1 + h_2u_2 + h_3u_3 = 0$ gehen?

376. Dem Fundamentaldreieck seien zwei Kegelschnitte umschrieben, von denen der eine durch die beiden Punkte x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3, der zweite durch die beiden Punkte x'''_1, x'''_2, x'''_3; $x^{IV}_1, x^{IV}_2, x^{IV}_3$ gehen möge. Welches ist der vierte Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte?

377. Dem Fundamentaldreieck sind zwei Kegelschnitte einbeschrieben, von denen der erste die beiden Geraden t_1, t_2, der zweite die beiden Geraden t_3, t_4 zu Tangenten hat. Welches ist die vierte gemeinschaftliche Tangente der beiden Kegelschnitte?

378. Gegeben ist die Gleichung eines Kegelschnittes in homogenen Punktkoordinaten

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Es soll die Gleichung dieser Kurve bezüglich desselben Fundamentaldreiecks in homogenen Linienkoordinaten bestimmt werden.

379. Die Gleichung eines Kegelschnittes in homogenen Linienkoordinaten ist

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 + 2k_{13}u_1u_3 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0.$$

Welches ist die Gleichung dieser Kurve in homogenen Punktkoordinaten, wenn das Fundamentaldreieck unverändert bleibt?

Pol und Polare. Das Polardreieck.

380. Gegeben ist der Kegelschnitt

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

und der Punkt P, dessen homogene Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3 sind. Welches ist die Gleichung der Polare des Punktes bezüglich der Kurve?

381. Es soll die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$(k_{11}u'_1 + k_{12}u'_2 + k_{13}u'_3)u_1 + (k_{12}u'_1 + k_{22}u'_2 + k_{23}u'_3)u_2 + (k_{13}u'_1 + k_{23}u'_2 + k_{33}u'_3)u_3 = 0$$

angegeben werden, wenn

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 + 2k_{13}u_1u_3 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes in homogenen Linienkoordinaten ist.

382. Gegeben ist der Kegelschnitt

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Es sollen die Ecken desjenigen Dreiecks bestimmt werden, welches dem Fundamentaldreieck konjugiert ist.

383. Die Polaren der Punkte einer Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ bezüglich des Kegelschnittes

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

bilden ein Strahlenbüschel. Welches ist die Gleichung desselben?

384. Welcher Bedingung müssen die Konstanten der Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ genügen, wenn die derselben entsprechende Gerade ein Durchmesser des Kegelschnittes

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

sein soll?

385. Die Gerade $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ möge als Polare bezüglich des Kegelschnittes

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

betrachtet werden. Welches sind die Koordinaten des zugehörigen Poles? Welche Bedeutung hat das Resultat, wenn man x_1, x_2, x_3 als Linienkoordinaten ansieht?

386. Gegeben ist der Kegelschnitt $k_{12}u_1u_2 + k_{23}u_2u_3 + k_{31}u_3u_1 = 0$. Es sollen die Koordinaten des dem Fundamentaldreieck konjugierten Dreiecks bestimmt werden.

387. Es sollen die Koordinaten des Mittelpunktes eines Kegelschnittes bestimmt werden, welcher der Gleichung

$$a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 = 0$$

entspricht.

388. Bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes soll ein sich selbst konjugiertes Dreieck (Polardreieck) konstruiert werden.

389. Welche Form gewinnt die Gleichung eines Kegelschnittes, wenn man ein sich selbst konjugiertes Dreieck als Fundamentaldreieck annimmt a) in homogenen Punktkoordinaten, b) in homogenen Linienkoordinaten?

390. Gegeben sei ein Kegelschnitt und ein sich selbst konjugiertes Dreieck bezüglich desselben als Fundamentaldreieck.

a) Ist $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes in Punktkoordinaten, wie lautet dann die Gleichung desselben in Linienkoordinaten?

b) Ist $k_1u_1^2 + k_2u_2^2 + k_3u_3^2 = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten, wie lautet die Gleichung desselben in Punktkoordinaten?

391. Gegeben sei ein Kegelschnitt und ein sich selbst konjugiertes Dreieck bezüglich desselben als Fundamentaldreieck. Welcher Bedingung müssen die Punktkoordinaten der Ecken, resp. die Linienkoordinaten der Seiten eines zweiten Dreiecks genügen, wenn dasselbe in Bezug auf den Kegelschnitt ebenfalls ein sich selbst konjugiertes sein soll?

392. Es soll die Gleichung eines Kegelschnittbüschels in homogenen Punktkoordinaten aufgestellt werden. Welche Form erhält dieselbe, wenn die Verbindungslinien der Diagonalecken des zu dem Büschel gehörenden Vierecks die Seiten des Fundamentaldreiecks sind?

393. Welcher Gleichung entspricht eine Kegelschnittschar, wenn die Schnittpunkte der Diagonalen des umschriebenen Tangentenvierecks als Eckpunkte des Fundamentaldreiecks angesehen werden?

394. Der Kegelschnitt $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$ möge von der Geraden $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ berührt werden. Wie lassen sich die Koordinaten des Berührungspunktes finden?

395. Der Punkt $f_1u_1 + f_2u_2 + f_3u_3 = 0$ möge auf dem Kegelschnitte $k_1u_1^2 + k_2u_2^2 + k_3u_3^2 = 0$ liegen. Es sollen die Koordi-

naten der Geraden gefunden werden, welche den Kegelschnitt in diesem Punkte berührt.

396. Von zwei gegebenen Dreiecken ist jedes bezüglich eines Kegelschnittes K sich selbst konjugiert. Es soll die Gleichung desjenigen Kegelschnittes bestimmt werden, der beiden Dreiecken umschrieben ist.

397. Gegeben sind zwei Dreiecke, von denen jedes bezüglich eines Kegelschnittes K sich selbst konjugiert ist. Wie lautet die Gleichung desjenigen Kegelschnittes, der sich beiden Dreiecken einbeschreiben läßt?

398. Einem gegebenen Kegelschnitte sind zwei Dreiecke einbeschrieben. Es soll die Gleichung desjenigen Kegelschnittes bestimmt werden, bezüglich dessen jedes der beiden Dreiecke sich selbst konjugiert ist.

399. Einem gegebenen Kegelschnitte sind zwei Dreiecke umschrieben. Es soll die Gleichung desjenigen Kegelschnittes aufgestellt werden, bezüglich dessen jedes der beiden Tangentendreiecke sich selbst konjugiert ist.

400. Gegeben sei ein Kegelschnitt $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$, bezüglich dessen zwei Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ einander konjugiert sein mögen. Man verbinde jede Ecke des ersten Dreiecks mit derjenigen Ecke, welche der zugehörigen Polare im zweiten Dreieck gegenüberliegt. Wie liegen diese drei Verbindungslinien zu einander?

401. Zwei Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ mögen bezüglich eines gegebenen Kegelschnittes einander konjugiert sein. Jede Seite des ersten Dreiecks sei bis zum Schnitt mit der Gegenseite ihres Pols im zweiten Dreieck verlängert. Welche Lage haben diese drei Schnittpunkte zu einander?

Mittelpunkt und Durchmesser.

402. Gegeben ist die Gleichung

$$a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 + a_{33} x_3^2 = 0.$$

Es sollen die Koordinaten des Mittelpunktes der Kurve bestimmt werden, welche der Gleichung entspricht.

403. Die Gleichung eines Kegelschnittes sei

$$k_{11} u_1^2 + 2 k_{12} u_1 u_2 + k_{22} u_2^2 + 2 k_{13} u_1 u_3 + 2 k_{23} u_2 u_3 + k_{33} u_3^2 = 0.$$

Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes desselben?

404. Durch fünf gegebene Punkte sei ein Kegelschnitt gelegt. Es soll die Lage des Mittelpunktes desselben bestimmt werden.

405. Einem gegebenen Fünfeck sei ein Kegelschnitt einbeschrieben. Welches ist die Gleichung des Mittelpunktes?

406. Um das Fundamentaldreieck soll ein Kegelschnitt beschrieben werden, dessen Mittelpunkt die Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3 besitzt.

407. Dem Fundamentaldreieck soll ein Kegelschnitt einbeschrieben werden, dessen Mittelpunkt der Punkt $k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 = 0$ ist.

408. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte aller derjenigen Kegelschnitte, welche durch die Ecken des Fundamentaldreiecks gehen und von der Geraden $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ berührt werden?

409. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kegelschnittes bestimmt werden, welcher von den Seiten des Fundamentaldreiecks berührt wird und durch den Punkt x'_1, x'_2, x'_3 geht.

410. Gegeben sei das Fundamentaldreieck ABC und eine Gerade $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche die gegebene Gerade zur Tangente haben, vorausgesetzt daß das Dreieck bezüglich derselben ein sich selbst konjugiertes ist?

411. Es soll der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kegelschnittes bestimmt werden, der durch den Punkt x'_1, x'_2, x'_3 geht, vorausgesetzt daß das Fundamentaldreieck bezüglich desselben ein sich selbst konjugiertes ist.

412. Gegeben sei ein Kegelschnitt, dessen Gleichung

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$$

ist. Es soll die Gleichung bestimmt werden, welcher das Durchmesserbüschel desselben entspricht.

413. Die Gerade $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ möge eine Sehne des Kegelschnittes $a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$ sein. Welcher Gleichung entspricht der der Sehne konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes?

414. Welcher Bedingungsgleichung müssen die Konstanten der Gleichung $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ genügen, wenn die derselben entsprechende Gerade ein Durchmesser des Kegelschnittes

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0$$

sein soll?

415. Gegeben ist die Gleichung eines Kegelschnittes

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0.$$

Welcher Relation müssen die Parameter zweier Durchmesser genügen, wenn diese Durchmesser einander konjugiert sein sollen?

416. Es sollen die Gleichungen der Asymptoten des Kegelschnittes bestimmt werden, dessen Gleichung $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$ ist.

417. Wie findet man die Gleichungen der Achsen eines Kegelschnittes, dessen Gleichung $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$ ist?

418. Zur Bestimmung einer Hyperbel sind die beiden Asymptoten und eine Tangente derselben gegeben. Welches ist die Gleichung der Kurve, wenn die drei gegebenen Geraden als Seiten des Fundamentaldreiecks betrachtet werden?

419. Von einer Ellipse seien zwei konjugierte Durchmesser der Länge und Lage nach gegeben. Welches ist die Gleichung der Kurve?

420. Wie lautet die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher die beiden Geraden $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ zu konjugierten Durchmessern hat und von den Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$, $b'_1 x_1 + b'_2 x_2 + b'_3 x_3 = 0$ berührt wird? Die unendlich ferne Gerade möge die dritte Seite des Fundamentaldreiecks sein.

Kegelschnittbüschel und Kegelschnittscharen.

421. Der Gleichung

$$(1 - f)\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + f\frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$$

entspricht ein Kegelschnittbüschel. Welche Werte muß man dem variabeln Parameter f erteilen, um die Gleichungen der Geradenpaare zu erhalten, welche dem Büschel angehören?

422. Gegeben ist eine Kegelschnittschar, welche der Gleichung

$$(1 - k)\frac{u_1^2}{k_1^2} - \frac{u_2^2}{k_2^2} + k\frac{u_3^2}{k_3^2} = 0$$

entspricht. Welches sind die Gleichungen der Punktpaare, die zu der Kegelschnittschar gehören?

423. Es soll die Gleichung der Parabel bestimmt werden, welche zu der Kegelschnittschar

$$\frac{(1-k)}{k_1^2}u_1^2 - \frac{1}{k_2^2}u_2^2 + \frac{k}{k_3^2}u_3^2 = 0$$

gehört.

424. Gegeben ist ein System von Kegelschnitten, welche eine doppelte Berührung haben. Welches ist die Gleichung der Parabel, die zu diesem Systeme gehört?

425. Welcher Kegelschnitt des Büschels

$$\frac{(1-f)}{a_1^2} x_1^2 - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{f}{a_3^2} x_3^2 = 0$$

wird von der geraden Linie $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ berührt?

426. Wie viele Kegelschnitte der Schar

$$\frac{1-k}{k_1^2} u_1^2 - \frac{1}{k_2^2} u_2^2 + \frac{k}{k_3^2} u_3^2 = 0$$

gehen durch den Punkt $h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3 = 0$?

427. Gegeben ist ein Kegelschnittbüschel

$$\frac{(1-f)}{a_1^2} x_1^2 - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{f}{a_3^2} x_3^2 = 0$$

und der Punkt P, dessen Koordinaten x'_1, x'_2, x'_3 sind. Wie liegen die Polaren des Punktes bezüglich der Kegelschnitte des Büschels?

428. Der Gleichung $\sqrt{a_1 x_1} + \sqrt{a_2 x_2} + \sqrt{a_3 x_3} = 0$ entspricht eine Kegelschnittschar, wenn a_1, a_2, a_3 der Bedingungsgleichung $\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \frac{a_3}{c_3} = 0$ genügen. Wie liegen die Polaren eines Punktes P bezüglich der Kegelschnitte der Schar?

429. Auf welcher Kurve liegen die Berührungspunkte aller derjenigen Tangenten, welche von dem Punkte $P(x'_1, x'_2, x'_3)$ an die Kegelschnitte des Büschels

$$\frac{1-f}{a_1^2} x_1^2 + \frac{1}{a_2^2} x_2^2 + \frac{f}{a_3^2} x_3^2 = 0$$

gelegt werden können?

430. Die Gerade G, deren Koordinaten u'_1, u'_2, u'_3 sind, möge als Polare bezüglich der Kegelschnittschar

$$\frac{(1-k)}{k_1^2} u_1^2 - \frac{u_2^2}{k_2^2} + \frac{k}{k_3^2} u_3^2 = 0$$

betrachtet werden. Es soll der Ort der zugehörigen Pole bestimmt werden.

431. Die Gerade G, deren Gleichung $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ ist, möge als Polare der Kegelschnitte des Büschels

$$\frac{(1-f)}{a_1^2}x_1^2 - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{f}{a_3^2}x_3^2 = 0$$

betrachtet werden. Auf welcher Kurve liegen die zugehörigen Pole?

432. Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte, welche dem Büschel

$$\frac{1-f}{a_1^2}x_1^2 - \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{f}{a_3^2}x_3^2 = 0$$

angehören?

433. Es soll der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte bestimmt werden, welche der Schar

$$\frac{(1-k)}{k_1^2}u_1^2 - \frac{u_2^2}{k_2^2} + \frac{k}{k_3^2}u_3^2 = 0$$

angehören.

434. Es soll die Anzahl der Kegelschnitte bestimmt werden, welche dem Büschel

$$\frac{1-f}{a_1^2}x_1^2 - \frac{1}{a_2^2}x_2^2 + \frac{f}{a_3^2}x_3^2 = 0$$

angehören und von dem Kegelschnitte

$$A_3x_1x_2 + A_1x_2x_3 + A_2x_3x_1 = 0$$

berührt werden.

435. Wie viele Kegelschnitte der Schar

$$\frac{1-k}{k_1^2}u_1^2 - \frac{1}{k_2^2}u_2^2 + \frac{k}{k_3^2}u_3^2 = 0$$

werden von dem Kegelschnitte

$$B_3u_1u_2 + B_1u_2u_3 + B_2u_3u_1 = 0$$

berührt?

436. Es soll eine Gleichung aufgestellt werden, welcher alle diejenigen Kegelschnitte entsprechen, die durch einen gegebenen Punkt P gehen, und für welche ein gegebenes Dreieck ein sich selbst konjugiertes ist.

437. Für eine Anzahl von Kegelschnitten möge ein gegebenes Dreieck ein sich selbst konjugiertes sein. Welcher Gleichung entsprechen diese Kegelschnitte, wenn alle von der gegebenen Geraden g berührt werden?

438. Gegeben ist ein Kegelschnittbüschel

$$\frac{1-f}{a_1^2}x_1^2 - \frac{1}{a_2^2}x_2^2 + \frac{f}{a_3^2}x_3^2 = 0$$

und eine Gerade $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$.

Es sollen die Durchmesser der einzelnen Kegelschnitte des Büschels bestimmt werden, welche der gegebenen Geraden konjugiert sind.

Vermischte Aufgaben.

439. Einem gegebenen Dreieck sei ein Kegelschnitt umschrieben und in den Eckpunkten seien die Tangenten an die Kurve gelegt. Welches sind die Gleichungen der Strahlen, von denen jeder mit zwei Seiten des Dreiecks und der durch den Schnittpunkt derselben gelegten Tangente ein harmonisches Büschel bildet und dabei der Tangente konjugiert ist? Wie liegen diese vierten Harmonikalen zu einander?

440. Einem gegebenen Dreieck sei ein Kegelschnitt einbeschrieben. Welches sind die Gleichungen derjenigen Punkte, die den Berührungspunkten bezüglich der Ecken des Dreiecks harmonisch konjugiert sind? Wie liegen die vierten harmonischen Punkte zu einander?

441. Gegeben seien die Schenkel zweier Winkel

$$\left|\begin{array}{l} \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0, \\ \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0. \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \\ \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_3}{a_3} = 0. \end{array}\right.$$

Durch die Scheitel seien zwei parallele Gerade gezogen und zu jeder derselben bezüglich der Schenkel des zugehörigen Winkels der konjugierte harmonische Strahl konstruiert. Welches ist der geometrische Ort des Schnittpunktes der vierten Harmonikalen?

442. Wie gestaltet sich das Resultat der vorhergehenden Aufgabe, wenn die durch die Scheitel der beiden Winkel gehenden Strahlen nicht parallel sind, sondern sich in einem Punkte P schneiden, der auf der Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ fortgleitet?

443. Gegeben sind drei feste Punkte, die als Eckpunkte des Fundamentaldreiecks betrachtet werden, und die beiden Geraden

$$(g_1)\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad (g_2)\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0.$$

Durch den Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gehe eine Gerade g_3 und schneide g_1 in M, ferner g_2 in N. Man verbinde M mit dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, außerdem N mit dem Punkte $x_1 = 0$, $x_3 = 0$. Diese beiden Verbindungslinien mögen sich im Punkte P schneiden.

Auf welcher Kurve bewegt sich der Punkt P, wenn die Gerade g_3 um den Punkt $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gedreht wird?

444. Gegeben sind drei gerade Linien g_1, g_2, g_3 und zwei Punkte P_1 und P_2. Um jeden der Punkte P_1 und P_2 dreht sich ein Strahl, sodaß der Schnittpunkt dieser beiden Strahlen auf der Geraden g_1 fortgleitet. Es möge der durch P_1 gehende Strahl g_3 in S, der durch P_2 gehende Strahl g_2 in T schneiden. Welche Kurve hüllt die verschiedenen Lagen des Strahles ST ein?

445. Durch zwei Punkte sind drei Kegelschnitte gelegt. Je zwei dieser Kegelschnitte schneiden sich in zwei weiteren Punkten. Es sollen die Gleichungen der durch diese Schnittpunkte gehenden gemeinschaftlichen Sehnen aufgestellt und die gegenseitige Lage dieser Sehnen bestimmt werden.

446. Welches Resultat wird sich aus den in der Lösung der vorhergehenden Aufgabe aufgestellten Gleichungen ableiten lassen, wenn x_1, x_2, x_3 als homogene Linienkoordinaten betrachtet werden?

447. Die Kegelschnitte eines Systems mögen in dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ eine Berührung zweiter Ordnung haben und alle durch den Punkt $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ gehen. Wieviele Kurven des Systems werden von der Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$ berührt? Die gemeinsame Tangente aller Kegelschnitte des Systems im Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ sei $a_{13} x_1 + a_{23} x_2 = 0$.

448. Die Kegelschnitte eines Systems mögen in dem Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ eine Berührung dritter Ordnung haben und als gemeinschaftliche Tangente in diesem Punkte die Gerade $a_{13} x_1 + a_{23} x_2 = 0$. Auf welcher Linie liegen die Mittelpunkte aller dieser Kegelschnitte?

449. Dem Fundamentaldreieck sei ein System von Kegelschnitten umschrieben, welche alle im Punkte $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ von der Geraden $b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0$ berührt werden. Wie liegen die Polaren des Punktes x'_1, x'_2, x'_3 bezüglich der Kegelschnitte dieses Systems?

450. Einem Dreieck sei ein System von Kegelschnitten einbeschrieben, welche alle von der einen Seite in einem bestimmten Punkte berührt werden. Auf welcher Linie liegen die Pole, wenn eine Gerade g als Polare bezüglich der Kegelschnitte des Systems betrachtet wird?

Inhaltsverzeichnis.

Projektivische Geometrie.

Projektivische Strahlenbüschel in einer Ebene.

Projektivische Punktreihen in einer Ebene.

Gebilde zweiter Ordnung.

Trimetrische Koordinaten.



